alte Maturaufgaben zu „Stochastik “

1 2007/2008

1. (8 P.) In einer Urne liegen 5 rote, 8 gelbe und 7 blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel anschliessend wieder in die Urne zurückgelegt wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

   a) Die gezogenen Kugeln alle die gleiche Farbe haben?

   b) Die gezogenen Kugeln alle verschiedene Farben haben?

   c) Die zweite gezogene Kugel gelb ist?

   d) Wie viele Kugeln müsste man mindestens ziehen, damit mit mehr als 99.5Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote dabei sein wird? Jede gezogene Kugel wird wiederum sofort in die Urne zurückgelegt.

   e) Es werden nacheinander, wiederum mit Zurücklegen, 7 Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich genau 3 rote Kugeln darunter?

   f) Zu den vorhandenen 20 Kugeln werden noch eine Anzahl rote Kugeln dazugelegt. Jetzt nimmt man mit einem Griff 2 Kugeln heraus. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln rot sind beträgt $\frac{1}{3}$. Wie viele rote Kugeln wurden noch dazugegeben?

2 2009/2010

1. (8 P.) Gegeben sei der folgende gefälschte Würfel:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2

   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Würfen 5 gleiche Ziffern zu erhalten ?

   b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Würfen 2 Zweier und 3 Dreier zu erhalten ?

   c) ie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Würfen genau 2 Zweier zu erhalten ?

   d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 10 Würfen mindestens 4 Zweier zu erhalten ?

   e) Wie oft muss dieser Würfel mindestens geworfen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal eine Zwei zu erhalten ?

   f) Jemand bietet Dir folgende Spiel an: Wenn Du eine Zahl würfelst, die kleiner als vier ist, dann erhälst du 10 Fr., andererseits musst Du 12 Fr. bezahlen. Zeige, dass dieses Spiel nicht fair ist. Wieviel müsstest Du bezahlen, damit das Spiel fair wird ?

3 2010/2011

1. **Wahrscheinlichkeitsrechnung (11 Punkte)** Wird bei einem Spielautomat ein Einfrankenstück eingeworfen, so setzen sich drei identische Walzen mit je 4 verschiedenen Figuren in Bewegung. Die drei Walzen kommen unabhängig voneinander zum Stillstand und zeigen je eine zufällige Figur. Jede der Figuren erscheint mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.

   - Zeigen zwei der drei Walzen die gleiche Figur, so werden zwei Franken ausbezahlt (der Einsatz wird nicht zurückbezahlt).
   - Erscheinen drei gleiche Figuren (z.B. F2-F2-F2), er erhält man (der Einsatz wird jeweils nicht zurückbezahlt):
     - Fr. 20, wenn alle drei Walzen F1 anzeigen.
     - Fr. 10 wenn alle drei Walzen F2 anzeigen.
     - Fr. 5 wenn alle drei Walzen entweder F3 oder F4 anzeigen.
   - Andernfalls - wenn also drei verschiedene Figuren angezeigt werden- erhält man nichts.

   a) Wie viele verschiedene Konstellationen sind möglich, wenn die Reihenfolge unterschieden wird (z.B. F1-F2-F5 $\neq$ F2-F5-F1) ?

   b) Wie viele verschiedene Konstellationen sind möglich, wenn die Reihenfolge nicht unterschieden wird (z.B. F1-F2-F5 = F2-F5-F1) ?

   c) Wie viele verschiedene Konstellationen sind möglich, wenn die Reihenfolge nicht unterschieden wird und irgend eine Figur genau zweimal vorkommen muss ?

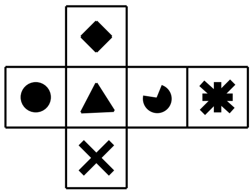
   d) Wie gross ist der erwartete Gewinn, resp. Verlust pro Spiel (Erwartungswert des Spiels) ?

   e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei zehnmaligem Spielen zweimal 20 Franken gewinnt und achtmal leer ausgeht ?

   f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei zehnmaligem Spielen mindestens einmal einen der möglichen Gewinne erzielt ?

4 2011/2012

1. (11 P.) **Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung**



Links abgebildet siehst du das Netz eines fairen Würfels, welches aus sechs verschiedenen Symbolen besteht. Du setzt einen Fünfliber auf eines der sechs Symbole. Nach dem Setzen werden sechs dieser Würfel gleichzeitig geworfen, womit eine Spielrunde absolviert ist.

Erscheint in einer Spielrunde dein gewähltes Symbol nicht oder nur einmal, so ist der Einsatz verloren. Erscheint dein Symbol mehrfach, so erhälst du den Fünfliber zurück und zusätzlich so viele Fünfliber wie Symbole deiner Wahl gefallen sind. Wir definieren die Zufallsvariable X:

X : Anzahl Würfel, bei denen das gewählte Symbol in einer Spielrunde vorkommt.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist vorgegeben:

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	0.334898	0.401878	0.200939	0.053584	0.008038	0.000643	0.000021

a) In der Tabelle ist für $X = 3$ der Wert 0.053584 angegeben. Wie lässt sich dieser Wert berechnen?

b) Du absolvierst eine Spielrunde. Wie viel Gewinn / Verlust kannst du im Mittel erwarten?

c) Du spielst drei Runden. Wie viele Setzmöglichkeiten hast du, wenn

d) Du absolvierst drei Spielrunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hast du nachher mehr Fünfliber als vorher?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen bei einem Wurf genau drei verschiedene Symbole doppelt?

5 Lösungen 2007/2008

1. (8 P.) In einer Urne liegen 5 rote, 8 gelbe und 7 blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel anschliessend wieder in die Urne zurückgelegt wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) Die gezogenen Kugeln alle die gleiche Farbe haben?

- $\underline{\underline{P(\text{alle gl. Farbe})}} = P(3r) + P(3g) + P(b) = \left(\frac{5}{20}\right)^3 + \left(\frac{8}{20}\right)^3 + \left(\frac{7}{20}\right)^3 \approx \underline{\underline{0.123}}$

b) Die gezogenen Kugeln alle verschiedene Farben haben?

- $\underline{\underline{P(\text{alle verschieden})}} = \frac{5}{20} \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{20} \cdot 6 = \underline{\underline{0.21}}$

c) Die zweite gezogene Kugel gelb ist? $\underline{\underline{P(2.\text{K gelb}) = 0.4}}$

d) Wie viele Kugeln müsste man mindestens ziehen, damit mit mehr als 99.5Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote dabei sein wird? Jede gezogene Kugel wird wiederum sofort in die Urne zurückgelegt.

- $\underline{\underline{P(\text{mind. eine rote Kugel})}} = 1 - P(\text{keine rote Kugel}) = 1 - \left(\frac{15}{20}\right)^n = 0.995 \Rightarrow -\left(\frac{15}{20}\right)^n = -0.005 \Rightarrow \left(\frac{15}{20}\right)^n = 0.005 \Rightarrow n = \log_{\frac{15}{20}} 0.005 = \frac{\log_{10}(0.005)}{\log_{10}(\frac{15}{20})} \approx 18.42 \Rightarrow \underline{\underline{19K}}$

e) Es werden nacheinander, wiederum mit Zurücklegen, 7 Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich genau 3 rote Kugeln darunter?

- $\underline{\underline{P(\text{genau 3 rote K.})}} = \binom{7}{3}\left(\frac{5}{20}\right)^3 \cdot \left(\frac{15}{20}\right)^4 \approx \underline{\underline{0.173}}$

f) Zu den vorhandenen 20 Kugeln werden noch eine Anzahl rote Kugeln dazugelegt. Jetzt nimmt man mit einem Griff 2 Kugeln heraus. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln rot sind beträgt $\frac{1}{3}$. Wie viele rote Kugeln wurden noch dazugegeben?

- x : Anz. rote Kugeln nach dazugeben, Total $8+7+x = 15+x$ Kugeln in der Urne
- $\frac{x}{15+x} \cdot \frac{x-1}{14+x} = \frac{1}{3}$
- $3x(x-1) = (15+x)(14+x)$
- $3x^2 - 3x = 210 + 29x + x^2 \Rightarrow 2x^2 - 32x - 210 = 0 \Rightarrow x^2 - 16x - 105 = 0 \Rightarrow (x-21)(x+5) = 0 \Rightarrow x_1 = 21, x_2 = -5 \Rightarrow$ 5 waren zuerst in der Urne, 21 am Ende $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{16 Kugeln wurden dazugegeben}}}$.

6 Lösungen 2009/2010

1. (8 P.) Gegeben sei der folgende gefälschte Würfel:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2

a) (1 P.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Würfen 5 gleiche Ziffern zu erhalten ?

- $3 \cdot 0.1^5 + 2 \cdot 0.2^5 + 1 \cdot 0.3^5 \approx \underline{\underline{0.0031}}$

b) (1 P. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Würfen 2 Zweier und 3 Dreier zu erhalten ?

- $\binom{5}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.3^3 \approx \underline{\underline{0.0108}}$

c) (1.5 P. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Würfen genau 2 Zweier zu erhalten ?

- $\binom{5}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 \approx \underline{\underline{0.2048}}$

d) (1 P.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 10 Würfen mindestens 4 Zweier zu erhalten ?

- $\underline{\underline{P(X \geq 4)}} = 1 - P(X \leq 3) = \underline{\underline{0.121}}$

e) (1.5 P.) Wie oft muss dieser Würfel mindestens geworfen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal eine Zwei zu erhalten ?

- $P(\text{mind. eine Zwei}) = 1 - P(\text{keine Zwei}) = 1 - 0.8^n = 0.99 \Rightarrow n \approx 20.64 \Rightarrow \underline{\underline{\text{mindestens 21 Mal}}}$

f) (1.5 P. Jemand bietet Dir folgende Spiel an: Wenn Du eine Zahl würfelst, die kleiner als vier ist, dann erhälst du 10 Fr., andererseits musst Du 12 Fr. bezahlen. Zeige, dass dieses Spiel nicht fair ist. Wieviel müsstest Du bezahlen, damit das Spiel fair wird ?

- $0.6 \cdot 10 \neq 0.4 \cdot 12 \Rightarrow$ nicht fair
- $0.6 \cdot 10 = 0.4 \cdot x \Rightarrow x = 15 \Rightarrow \underline{\underline{\text{15 Franken}}}$

7 Lösungen 2010/2011

1. **Wahrscheinlichkeitsrechnung (11 Punkte)** Wird bei einem Spielautomat ein Einfrankenstück eingeworfen, so setzen sich drei identische Walzen mit je 4 verschiedenen Figuren in Bewegung. Die drei Walzen kommen unabhängig voneinander zum Stillstand und zeigen je eine zufällige Figur. Jede der Figuren erscheint mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.

   - Zeigen zwei der drei Walzen die gleiche Figur, so werden zwei Franken ausbezahlt (der Einsatz wird nicht zurückbezahlt).
   - Erscheinen drei gleiche Figuren (z.B. F2-F2-F2), er erhält man (der Einsatz wird jeweils nicht zurückbezahlt):
     – Fr. 20, wenn alle drei Walzen F1 anzeigen.
     – Fr. 10 wenn alle drei Walzen F2 anzeigen.
     – Fr. 5 wenn alle drei Walzen entweder F3 oder F4 anzeigen.
   - Andernfalls - wenn also drei verschiedene Figuren angezeigt werden- erhält man nichts.

   a) (1 P.) Wie viele verschiedene Konstellationen sind möglich, wenn die Reihenfolge unterschieden wird (z.B. F1-F2-F5 $\neq$ F2-F5-F1) ?
      - $4^3 = \underline{\underline{64}}$

   b) (1.5 P.) Wie viele verschiedene Konstellationen sind möglich, wenn die Reihenfolge nicht unterschieden wird (z.B. F1-F2-F5 = F2-F5-F1) ?
      - Komb. mit WH: $\binom{6}{3} = \underline{\underline{20}}$

   c) (1 P.) Wie viele verschiedene Konstellationen sind möglich, wenn die Reihenfolge nicht unterschieden wird und irgend eine Figur genau zweimal vorkommen muss ?
      - $4 \cdot 3 = \underline{\underline{12}}$

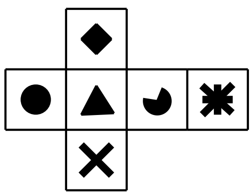
   d) (4 P.) Wie gross ist der erwartete Gewinn, resp. Verlust pro Spiel (Erwartungswert des Spiels) ?
      - X : Anz. Franken
      - $\underline{\underline{E(X)}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0.25^3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 0.25^3 \cdot 1 + 0.25^3 \cdot 19 + 0.25^3 \cdot 9 + 2 \cdot 0.25^3 \cdot 4 = \underline{\underline{0.75}}$

   e) (2 P.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei zehnmaligem Spielen zweimal 20 Franken gewinnt und achtmal leer ausgeht ?
      - $\underline{\underline{P(\text{2 Mal 20.- und 8 Mal leer})}} = \binom{10}{2} \cdot (0.25^3)^2 \cdot (1 - 0.25^3)^8 \approx \underline{\underline{0.01}}$

   f) (1.5 P.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei zehnmaligem Spielen mindestens einmal einen der möglichen Gewinne erzielt ?
      - $\underline{\underline{P(\text{mind. ein Gewinn})}} = 1 - P(\text{kein Gewinn} = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0.25^3 = \underline{\underline{0.63}}$

8 Lösungen 2011/2012

1. (11 P.) **Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung**



Links abgebildet siehst du das Netz eines fairen Würfels, welches aus sechs verschiedenen Symbolen besteht. Du setzt einen Fünfliber auf eines der sechs Symbole. Nach dem Setzen werden sechs dieser Würfel gleichzeitig geworfen, womit eine Spielrunde absolviert ist.

Erscheint in einer Spielrunde dein gewähltes Symbol nicht oder nur einmal, so ist der Einsatz verloren. Erscheint dein Symbol mehrfach, so erhälst du den Fünfliber zurück und zusätzlich so viele Fünfliber wie Symbole deiner Wahl gefallen sind. Wir definieren die Zufallsvariable X:

X : Anzahl Würfel, bei denen das gewählte Symbol in einer Spielrunde vorkommt.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist vorgegeben:

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	0.334898	0.401878	0.200939	0.053584	0.008038	0.000643	0.000021

a) (1.5 P.) In der Tabelle ist für $X = 3$ der Wert 0.053584 angegeben. Wie lässt sich dieser Wert berechnen?

- Bernoulli-Serie mit $n = 6, p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}, k = 3$
- $P(\text{genau 3 mal erscheint das Symbol}) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.05358 \approx \underline{\underline{0.05}}$

b) (2 P.) Du absolvierst eine Spielrunde. Wie viel Gewinn / Verlust kannst du im Mittel erwarten?

- Zufallsvariable X: Gewinn pro eingesetzte Münze
- (1 P.)

X	-5	10	15	20	25	30
$P(X)$	0.334898+0.401878	0.200939	0.053584	0.008038	0.000643	0.000021

- (1 P.) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = (0.334898 + 0.401878) \cdot (-5) + 0.200939 \cdot 10 + \cdots + 0.000021 \cdot 30$ $\approx -0.693266 \approx \underline{\underline{-0.69}}$

c) (2 P.) Du spielst drei Runden. Wie viele Setzmöglichkeiten hast du, wenn

i) (1 P.) kein Symbol mehr als einmal gewählt werden darf? $\Rightarrow 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{120}}$

ii) (1 P.) jedes Symbol mehrfach gewählt werden darf? $\Rightarrow 6^3 = \underline{\underline{216}}$

d) (3 P.) Du absolvierst drei Spielrunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hast du nachher mehr Fünfliber als vorher?

- $P(\text{mehr Münzen}) = 1 - P(\text{höchstens gleich viele Münzen})$
  $= 1 - [P(\text{immer verlieren}) + P(\text{2 mal verlieren, 1 mal zwei Münzen gewinnen})]$
  $= 1 - [(0.334898 + 0.401878)^3 + 3 \cdot (0.334898 + 0.401878)^2 \cdot 0.200939] \approx \underline{\underline{0.27}}$

e) (2.5 P.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen bei einem Wurf genau drei verschiedene Symbole doppelt?

- (0.5 P.) mögliche Fälle: $6^6 = 46656$
- (1.5 P.) günstige Fälle: $\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 1800$
- (0.5 P.) $P(\text{genau drei Symbole je zweimal}) = \frac{1800}{46656} \approx 0.0386 \approx \underline{\underline{0.04}}$