Lösungen zu den Fragen

1. Gib eine Gleichung an, die
   a) genau 2 Lösungen hat.
   $\rightarrow$ z.B. $(x-2)(x+3)=0$
   b) genau 3 Lösungen hat.
   $\rightarrow$ z.B. $(x-2)(x+3)(x+4)=0$
2. Löse die Gleichung $x^2-x=2$ ohne Formel.
   - $x^2-x=2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=2, x_2=-1$
   - $\underline{\underline{\mathbf{L}=\{-1,2\}}}$
3. Löse die Gleichung $x^2+6x+1=0$ mit und ohne Formel.
   - Mit Formel: $x^2+6x+1=0 \Rightarrow a=1, b=6, c=1$
   - $x_{1,2}=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-6 \pm \sqrt{36-4}}{2}=\dfrac{-6 \pm \sqrt{32}}{2}$
   - Ohne Formel: $x^2+6x+1=0$
   - $x^2+6x+...=(x+...)^2 \Rightarrow x^2+6x+9=(x+3)^2 \Rightarrow x^2+6x=(x+3)^2-9$
   - $(x+3)^2-9+1=0 \Rightarrow (x+3)^2=8 \Rightarrow x_{1,2}+3=\pm\sqrt{8} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{8}-3$
   - $\underline{\underline{\mathbf{L}=\pm\sqrt{8}-3}}$
4. Löse die folgenden Ungleichungen:
   a) $3x \leq -6$
      - $3x \leq -6 \Rightarrow x \leq -2$
   b) $(x-2)(x+3) \leq 0$
      - Es liegt eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen -3 und 2 vor.
      - Unterhalb des Graphen ist die Parabel im Bereich $[-3;2]$
      - $\underline{\underline{\mathbf{L}=[-3;2]}}$
5. Löse die folgenden Gleichungssysteme.
   a) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ x+2y+2z=7 \\ 2x+4y+5z=15 \end{array}\right|$
      - $\Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2x+2y+2z=8 \\ 2x+4y+4z=14 \\ 2x+4y+5z=15 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} -2y-2z=-6 \\ -2y-3z=-8 \end{array}\right| \Rightarrow \underline{\underline{z=2, y=1, x=0.5}}$
   b) $\left|\begin{array}{l} 11x-9y=30 \\ 8x-7y=20 \\ x-y+z=10 \end{array}\right|$
      - $\Rightarrow \left|\begin{array}{l} 88x-72y=240 \\ 88x-77y=220 \\ x-y+z=10 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 5y=20 \\ x-y+z=10 \end{array}\right| \Rightarrow \underline{\underline{y=4, x=6, z=8}}$

c) $\begin{vmatrix} 4x+2y=2 \\ 2x+3z=16 \\ y+4z=13 \end{vmatrix}$

- $\Rightarrow \begin{vmatrix} 4x+2y=2 \\ 4x+6z=32 \\ y+4z=13 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2y-6z=-30 \\ y+4z=13 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2y-6z=-30 \\ 2y+8z=26 \end{vmatrix}$
  $\Rightarrow 14z=56 \Rightarrow \underline{\underline{z=4, y=-3, x=2}}$

6. Vor 5 Jahren war der Vater 5 mal so alt wie der Sohn. In 3 Jahren wird er 3 Mal so alt sein wie der Sohn. Wie alt sind die beiden jetzt?
   - x Alter Vater, y Alter Sohn.
   - $\begin{vmatrix} (x-5)=5(y-5) \\ (x-3)=3(y+3) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-5=5y-25 \\ x-3=3y+9 \end{vmatrix} \Rightarrow -2=2y-34 \Rightarrow \underline{\underline{y=16, x=60}}$
7. Löse folgendes Gleichungssystem nach x und y auf.

$$\begin{vmatrix} 4x+6y=3 \\ bx-2y=1 \end{vmatrix}$$

   - $\Rightarrow \begin{vmatrix} 4x+6y=3 \\ 3bx-6y=3 \end{vmatrix}$
   - $\Rightarrow 4x+3bx=6 \Rightarrow x(4+3b)=6 \Rightarrow x=\dfrac{6}{4+3b}$
   - $\Rightarrow \begin{vmatrix} 4bx+6by=3b \\ 4bx-8y=4 \end{vmatrix}$
   - $\Rightarrow 6by+8y=3b-4 \Rightarrow y(6b+8)=3b-4 \Rightarrow y=\dfrac{3b-4}{6b+8}$
8. Löse das folgende Gleichungssystem zeichnerisch (Ablesen des Schnittpunktes) ! Überprüfe durch Einsetzen !

$$\begin{vmatrix} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{vmatrix}$$

   - 1.Variante: Beide Gleichungen nach y auflösen und die Geraden einzeichnen.
   - 2.Variante: Je zwei Punkte der beiden Geraden berechnen und einzeichnen.
     - $x=1 \Rightarrow y=2$, $x=2 \Rightarrow y=1$, Gerade zeichnen.
     - $x=1 \Rightarrow y=2$, $x=2 \Rightarrow y=0$, Gerade zeichnen.
   - Die Geraden scheiden sich in $(1|2)$.

9. Welcher Wert muss für a eingesetzt werden, damit das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{c} 2ax + 3y = 4 \\ 3ax - 2y = 3 \end{array} \right|$$

a) Genau 1 Lösung hat ?

- $\left| \begin{array}{c} y = \dfrac{-\,2ax + 4}{3} \\ y = \dfrac{-\,3ax + 3}{-2} \end{array} \right|$
- $\dfrac{-\,2a}{3} \neq \dfrac{-\,3a}{-2}$
- $(-2)(-2a) \neq 3(-3a) \Rightarrow 4a \neq 9a \Rightarrow 4a - 9a \neq 0 \Rightarrow -5a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$

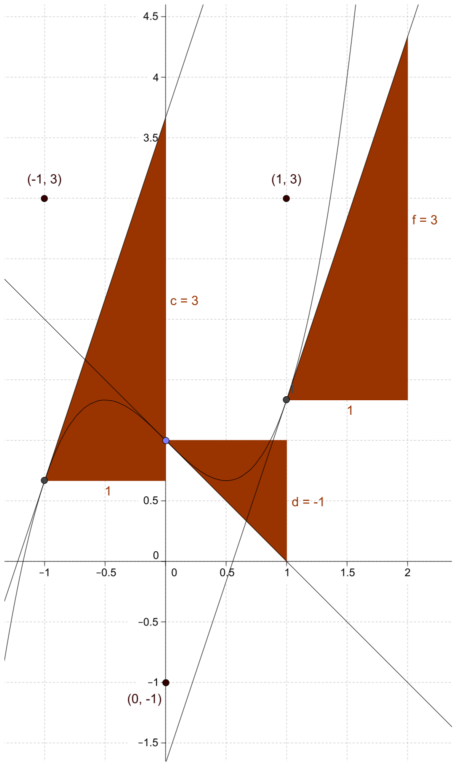
b) keine Lösung hat ?

- $\dfrac{4}{3} \neq \dfrac{3}{-2} \Rightarrow$ keine Lösung, wenn $a = 0$.

c) unendlich viele Lösungen hat ?

- $\dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{-2} \Rightarrow$ Diese Gleichung ist nicht erfüllbar, es gibt also in keinem Fall unendlich viele Lösungen.

10. Gegeben ist der untenstehende Graph. Bestimme zeichnerisch die Ableitungsfunktion. Kannst du etwas über die Funktionsvorschrift sagen ?
    - Wir zeichnen an geeigneten Stellen die Tangente an der Graphen. In der untenstehenden Abbildung wurde das an den Stellen -1,0,1 gemacht. Anschliessend wird die Steigung bestimmt und der entstehende Punkt (x: Stelle, y: Steigung an der Stelle x) wird eingetragen.
    - In unserem Beispiel zeichnet sich eine Parabel mit der Vorschrift $y = x^2 - 1$ ab. Um sicher zu sein, müsste man noch mehr Punkte eintragen oder weiterführendere Überlegungen anstellen (z.B. der Graph wird bei zunehmendem x immer steiler, die Ableitungsfunktion wird also weiter zunehmen,...).



11. Kannst Du eine Funktion angeben
    a) deren Definitionsmenge grösser als die Wertemenge ist?
       - Beispiel 1: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{R}_0^+$
       - Beispiel 2: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$, $f(x) = |x| \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{R}_0^+$
       - Beispiel 3: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin(x) \Rightarrow \mathbf{W} = [-1, 1]$
       - Beispiel 4: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$, $f(x) = e^x \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{R}^+$
    b) deren Definitionsmenge gleich der Wertemenge ist?
       - Beispiel 1: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$, $f(x) = x \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{R}$
       - Beispiel 2: $\mathbf{D} = \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{R}$

c) deren Wertemenge grösser als die Definitionsmenge ist?
   - $\mathbf{D} = \mathbf{R}^+, f(x) = \log_{10}(x) \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{R}$

12. Leite den folgenden Ausdruck nach x ab. Im Ergebnis dürfen weder negative noch gebrochene Exponenten vorkommen.

$$f(x) = \frac{4}{x^3} + \sqrt{x^5} - \frac{2x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

- $f(x) = 4x^{-3} + x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2x}{x^{4/3}} = 4x^{-3} + x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$
- $f'(x) = -12x^{-4} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot -\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{-\frac{12}{x^4} + \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{2\sqrt[3]{x^4}}{3}}}$

13. Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^1 \frac{5}{e^{3x-2}}\,\mathrm{d}x$$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{e^{3x-2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 5e^{-(3x-2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 5e^{-3x+2}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{5e^{-3x+2}}{-3}\right|_0^1$
  $\displaystyle= \frac{5e^{-3+2}}{-3} - \frac{5e^2}{-3} = -\frac{5}{3e} + \frac{5e^2}{3}$

14. Aus einem Draht von 49 cm Länge soll ein Rechteck so gebogen werden, dass dessen Fläche möglichst gross wird. Wie lang sind die Rechtecksseiten ?
    - x: Länge, y: Breite.
    - Zielfunktion: $F(x,y) = x \cdot y$
    - Nebenbedingung: $2x + 2y = 49 \Rightarrow y = \dfrac{49 - 2x}{2} = 24.5 - x$
    - $F(x) = x(24.5 - x) = 24.5x - x^2$
    - $F'(x) = 24.5 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 24.5 \Rightarrow \underline{\underline{x = 12.25}} \Rightarrow \underline{\underline{y = 12.25}}$

15. Eine Bewegung gehorcht dem Gesetz $s = p + qt + rt^2$. Zur Zeit $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ betragen der zurückgelegte Weg $s_1 = 4\,\mathrm{m}$ und die Geschwindigkeit $v_1 = 3\,\mathrm{m/s}$. Die Beschleunigung beträgt $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Wie lautet die Gleichung der Weg-Zeit-Funktion ?
    - $4 = p + q + r$ (Gl.1)
    - $v(t) = s'(t) = q + 2rt; v(1) = q + 2r = 3$ (Gl.2)
    - $a(t) = v'(t) = 2r; a(1) = 2r = 2 \Rightarrow r = 1$
    - Gl.2: $q + 2 = 3 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow \underline{\underline{s(t) = 2 + t + t^2}}$

16. Leite ab: $f(x) = \ln(\sin x)$
    - Kettenregel: $g(x) = \sin(x), u = \sin(x), h(u) = \ln(u)$
    - $f'(x) = h'(u) \cdot g'(x) = \frac{1}{u}\cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
17. Eine nach oben geöffnete Parabel 2.Ordnung geht durch den Punkt $P(0|0)$ und $A(4|0)$. Die Fläche, die von der x-Achse und Parabel eingeschlossen wird, hat den Inhalt vom Betrag 16. Wie heisst die Funktionsvorschrift ?
    - $f(x) = ax^2 + bx + c$
    - $\underline{\underline{0 = c}}$
    - $0 = 16a + 4b \Rightarrow 0 = 4a + b(\text{Gl.1})$
    - $\int_0^4 ax^2 + bx\,dx = -16 \Rightarrow \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}dx = -16\Big|_0^4 \Rightarrow \frac{64a}{3} + \frac{16b}{2} = -16 \Rightarrow$ $128a + 48b = -96 \Rightarrow 16a + 6b = -12 \Rightarrow(\text{Gl.2})$
    - Gl. 1 nach b auflösen: $b = -4a$
    - Einsetzen in (Gl.2): $16a + 6(-4a) = -12 \Rightarrow 16a - 24a = -12 \Rightarrow \underline{\underline{a = 1.5}} \Rightarrow$ $\underline{\underline{b = -6}}$
18. Unter welchem Winkel schneidet der Graph der folgenden Funktion die x-Achse ?

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + x^2 - 2x$$

- $-\frac{1}{8}x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(-0.125x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$
- $-0.125x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 4.$
- $f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 2x - 2$
- $f'(0) = -2 \Rightarrow \tan(\alpha) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_1}} = \tan^- 1(-2) = \underline{\underline{-63.43°}}$
- $f'(4) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_2 = 0°}}$

19. Berechne die Definitionsmenge, die Nullstellen, die Pole, die Asymptoten und die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-9}$$

- Definitionsmenge: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3 \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{R}\backslash\{-3, 3\}$
- Nullstellen: $1 - x^2 = 0 \Rightarrow (1+x)(1-x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1 \Rightarrow N_1(-1|0), N_2(1|0)$
- Pole bei $x = -3$ und bei $x = 3$.
- Asymptoten:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-9} = -1$
  - $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-9} = -1$
- $f'(x) = \frac{-2x(x^2-9)-(1-x^2)2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-2x^3+18x-2x+2x^3}{(x^2-9)^2} = \frac{16x}{(x^2-9)^2}$

20. Löse folgendes Integral: $\int_0^\pi (3x+\pi)\,dx$

- $\underline{\underline{\int_0^\pi (3x+\pi)\,dx}} = \frac{3x^2}{2} + \pi x\Big|_0^\pi = \frac{3\pi^2}{2} + \pi^2 = \underline{\underline{\frac{5\pi^2}{2}}}$

21. Ein Wasserstrahl fliesst aus einem in 2 m Höhe angebrachten Rohr und trifft den Boden in einem Punkte A, dessen Horizontalentfernung vom Ausfluss 3 m beträgt. Unter welchem Winkel tritt der Strahl auf (Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$) ?

- $c = 2$
- $0 = 9a + 3b + 2$ (Gl.1)
- $f'(x) = 2ax + b$
- $f'(0) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$
- Einsetzen in Gl.1: $0 = 9a + 3 \cdot 0 + 2 \Rightarrow a = -\frac{2}{9}$
- $f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 2$
- $f'(x) = -\frac{4}{9}x \Rightarrow f'(3) = -\frac{12}{9} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = \tan^{-1}\left(-\frac{12}{9}\right) = \underline{\underline{-53.13^\circ}}$

22. Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse $c = 6\,\text{cm}$ erzeugt einen Kegel grössten Inhalts, wenn man es um eine Kathete dreht ?
  - 1.Kathete h: Auf der x-Achse, 2.Kathete r: Auf der y-Achse
  - Die Lösung bezieht sich auf die Rotation um die x-Achse.
  - $f(x) = -\frac{r}{h}x + r$
  - Nullstelle bei $(h|0)$
  - $\underline{\underline{V}} = \pi \int_0^h f(x)^2\,dx = \pi \int_0^h \left(-\frac{r}{h}x + r\right)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r^2}{h^2}x^2 - 2\frac{r^2}{h}x + r^2\right) dx$ $= \pi \left. \frac{r^2}{3h^2}x^3 - \frac{r^2}{2h}x^2 + r^2x \right|_0^h = \pi\left(\frac{r^2}{3h^2}h^3 - \frac{r^2}{h}h^2 + r^2h\right) = \pi\left(\frac{r^2h}{3} - r^2h + r^2h\right) =$ $\underline{\underline{\frac{\pi r^2 h}{3}}}$
  - $V(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$
  - Nebenbed: $r^2 + h^2 = 6^2 \Rightarrow r^2 = 36 - h^2$
  - Einsetzen: $V(h) = \frac{\pi(36-h^2)h}{3} = 12\pi h - \frac{\pi h^3}{3}$
  - $V'(h) = 12\pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow \pi(12 - h^2) = 0 \Rightarrow 12 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow \underline{\underline{h = \sqrt{12}}}$
  - $r^2 + h^2 = c^2 \Rightarrow r^2 + 12 = 36 \Rightarrow r^2 = 24 \Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{24}$, wobei die negative Lösung wegfällt $\Rightarrow \underline{\underline{r = \sqrt{24}}}$.

23. Wie lautet die Vorschrift der Polynomfunktion 3.Grades, welche die x-Achse in $N(0|0)$ berührt und in $A(1|-2)$ einen Wendepunkt hat ?
  - $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
  - $N(0|0) \Rightarrow 0 = d$
  - $A(1|-2) \Rightarrow -2 = a + b + c + d$ (Gl.1)
  - $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2$
  - $f''(x) = 6ax + 2b; f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ (Gl.2)
  - Gl.1 vereinfachen: $-2 = a + b$
  - $-4 = 2a + 2b$ und $0 = 6a + 2b \Rightarrow -4 = -4a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -3$
  - $\underline{\underline{f(x) = x^3 - 3x^2}}$

24. Ein oben offenes zylindrisches Gefäss mit Inhalt $V = 2\,\mathrm{dm}^3$ soll mit möglichst wenig Blech hergestellt werden. Berechne den Radius der Grundfläche.
   a) r: Radius in dm, h: Höhe in dm.
   b) Zielfunktion ist die Oberfläche ohne Deckel: $O(r,h) = \pi r^2 + 2\pi r h$
   c) $\pi r^2 h = 2 \Rightarrow h = \dfrac{2}{\pi r^2}$
   d) $O(r) = \pi r^2 + 2\pi r \dfrac{2}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{4\pi r}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{4}{r}$
   e) $O'(r) = 2\pi r - \dfrac{4}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 - 4 = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{2}{\pi} \Rightarrow \underline{\underline{r = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}}}$
25. Der Graph der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ wird im Bereich $1 \leq x \geq 4$ um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen.
   - $\underline{\underline{V_x}} = \pi \displaystyle\int_1^4 (x^2)^2\,dx = \pi \int_1^4 x^4\,dx = \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^4 = \underline{\underline{642.77}}$
26. Wie lautet die Funktion 3.Grades mit $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, die durch den Punkt $A(5|0)$ geht, bei $x_1 = 2\sqrt{3}$ ein Extremum und bei $x_2 = 2$ eine Wendestelle hat ?
   - $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
   - $0 = 125 + 25a + 5b + c$
   - $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; f'(2\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow 3(2\sqrt{3})^2 + 2a(2\sqrt{3}) + b = 0 \Rightarrow 36 + 4\sqrt{3}a + b = 0$
   - $f''(x) = 6x + 2a; f''(2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -6$
   - usw., muss nicht mehr explizit ausgerechnet werden.
27. a) Finde jeweils eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften.
      i) Die Ableitung der Funktion ist $x^2+2x+4+e^x$. $\to f(x) = \dfrac{x^3}{3}+x^2+4x+e^x$.
      ii) Die Funktion hat eine Definitionslücke bei $x = 4$ und der Grenzwert für x gegen Unendlich ist 4. $\to f(x) = \dfrac{4x}{x-4}$.
      iii) Die Funktion hat 3 Nullstellen, ihr Grenzwert für x gegen Unendlich ist 0. $\to f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)(x-1)}{x^4}$.
      iv) Die Asymptote der Funktion ist $y = 3$, die Funktion hat einen Pol an der Stelle 3. $\to f(x) = \dfrac{3x}{x-3}$.

28. Gegeben ist die Funktion f mit der Vorschrift

$$f(x) = \frac{0.5x^3 + 1.6x}{x^2 - 4}$$

a) Bestimme die Pole dieser Funktion.
  - $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$
  - Pole bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

b) Was lässt sich über die Asymptote aussagen ?
  - Es gibt keine horizontale Asymptote.

c) Vergleiche die Funktionswerte an den Stellen 1 und -1.
  - $f(1) = -0.7, f(-1) = 0.7$. Der Betrag ist gleich, das Vorzeichen ist verschieden.

d) Vergleiche die Funktionswerte an den Stellen u und $-u$.
  - Der Betrag ist wiederum gleich, das Vorzeichen verschieden.

e) Was lässt sich über den Graphen der Funktion aussagen ?
  - Punktsymmetrisch bezüglich dem Nullpunkt.

29. Michael Phelps, ein Schwimmer, nimmt an 8 olympischen Wettbewerben teil. In 6 Wettbewerben ist er Topfavorit, seine Siegchance liegt bei 90%. In zwei weiteren Wettbewerben liegt seine Siegchance nur bei 40%. Wie gross ist seine Chance, 6 oder 7 Goldmedaillen zu gewinnen ?
  - 1.Fall: 6 Goldmedaillen
    - Fall 1.1: 4 Gold bei 90%, 2 Gold bei 40% $\rightarrow \binom{6}{4} \cdot 0.9^4 \cdot 0.1^2 \cdot \binom{2}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^0$
    - Fall 1.2: 5 Gold bei 90%, 1 Gold bei 40% $\rightarrow \binom{6}{5} \cdot 0.9^5 \cdot 0.1^1 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^1$
    - Fall 1.3: 6 Gold bei 90%, 0 Gold bei 40% $\rightarrow \binom{6}{6} \cdot 0.9^6 \cdot 0.1^0 \cdot \binom{2}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^2$
  - Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, alle Fälle aufsummieren.
  - 2.Fall: 7 Goldmedaillen
    - Fall 1.1: 5 Gold bei 90%, 2 Gold bei 40% $\rightarrow \binom{6}{5} \cdot 0.9^5 \cdot 0.1^1 \cdot \binom{2}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^0$
    - Fall 1.2: 6 Gold bei 90%, 1 Gold bei 40% $\rightarrow \binom{6}{6} \cdot 0.9^6 \cdot 0.1^0 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^1$
  - Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu erhalten, müssen alle Fälle aufsummiert werden.

30. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{0.5x+q}{x-2}$. Die Steigung an der Stelle $x = 1$ ist -5Bestimme q.
  - $f'(x) = \dfrac{0.5(x-2) - (0.5x+q) \cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{0.5x - 1 - 0.5x + q}{(x-2)^2}$
  - $f'(1) = -5 \Rightarrow \dfrac{-1+q}{(1-2)^2} = -5 \Rightarrow -1 + q = -5 \Rightarrow \underline{\underline{q = -4}}$

31. Ein Funktionär wählt aus einer Gruppe von 24 Athleten (davon 5 Amerikaner) 4 Personen aus, die zum Dopingtest erscheinen müssen.
   a) Wieviele Möglichkeiten, dies zu tun, hat der Funktionär ?
      - $\binom{24}{4}$ Möglichkeiten
   b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein ganz bestimmter Sportler ist ?
      - Mögliche Fälle: $\binom{24}{4}$ Möglichkeiten
      - Günstige Fälle: $\dfrac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{23}{3} \Rightarrow \underline{\underline{P}} = \dfrac{\binom{23}{3}}{\binom{24}{4}} = \underline{\underline{1/6}}$
   c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens einen Amerikaner trifft ?
      - $P(\text{kein Amerikaner}) = (19/24)(18/23)(17/22)(16/21) = 0.36$
      - $\underline{\underline{P(\text{mind. 1 Amerikaner})}} = 1 - P(\text{kein Amerikaner}) = 1 - 0.36 = \underline{\underline{0.64}}$
   d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau zwei Amerikaner trifft ?
      - $\underline{\underline{P(2 \text{ Amerikaner})}} = \binom{4}{2}(5/24)(4/23)(19/22)(18/21) = \underline{\underline{0.32}}$
32. Gegeben ist die Funktionsvorschrift $f(x) = \sqrt{6-x}$.
   a) Bestimme die grösstmögliche Definitionsmenge und die dazugehörige Wertemenge.
      - $6 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -6 \Rightarrow x \leq 6 \Rightarrow \mathbf{D} = (-\infty, 6]$
   b) Skizziere den Graphen.
   c) Finde den Punkt auf dem Graphen, der den kleinsten Abstand zum Koordinatenursprung hat.
      - Zielfunktion: $Z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; Nebenbedingung: $y = \sqrt{6-x}$
      - Einsetzen: $Z(x) = \sqrt{x^2+6-x}$
      - Ableiten: $Z'(x) = 0.5\sqrt[3]{x^2+6-x}(2x-1) \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0.5}}$
33. zu aufwendig
34. Der Graph der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 10$ schliesst mit der y-Achse und der Geraden $y = x + 4$ im ersten Quadranten eine Fläche ein. Wie gross ist das Volumen, wenn diese Fläche um die x-Achse rotiert ?
   - Schnittpunkt: $-x^2 + 10 = x + 4 \Rightarrow -x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2$
   - S(2—6)
   - $-x^2 + 10 = 0 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10}$
   - $\underline{\underline{V_x}} = \pi \int\limits_0^2 x + 4 \,\mathrm{d}x + \pi \int\limits_2^{\sqrt{10}} -x^2 + 10 \,\mathrm{d}x \approx \underline{\underline{43.19}}$