Lösungen Repetition Potenzen

Formeln:

$a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{q_1+q_2}$

Merksatz: „Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem wir die Basis beibehalten und die Exponenten addieren. “

$a^{q_1} : a^{q_2} = a^{q_1-q_2}$

Merksatz: „Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem wir die Basis beibehalten und die Exponenten subtrahieren. “

$(a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 \cdot q_2}$

Merksatz: „Potenzen werden potenziert, indem wir die Exponenten multiplizieren. “

$a^{q_1} \cdot b^{q_1} = (ab)^{q_1}$

Merksatz: „Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem wir den Exponenten beibehalten und die Basen multiplizieren. “

$a^{q_1} : b^{q_1} = (a : b)^{q_1}$

Merksatz: „Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem wir den Exponenten beibehalten und die Basen dividieren. “

Übungen

1.

2. Das Produkt aller Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen ist gleich 2^{14}. Fülle die Tabelle aus.

2^{11}	2^{-2}	2^{-3}	2^{8}
2^{0}	2^{5}	2^{6}	2^{3}
2^{4}	2	2^{2}	2^{7}
2^{-1}	2^{10}	2^{9}	2^{-4}

3.

4.

5.

6.

7. Berechne ohne TR. Schreibe Dein Ergebnis als Potenz mit rationalem Exponenten bzw. als Zahl wenn möglich.

   a) $5^{\frac{1}{6}} : 5^{\frac{1}{7}} = 5^{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}} = 5^{\frac{1}{42}}$

   b) $\left(a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}}\right) : a = \left(a^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}\right) : a = a^{\frac{1}{12}} : a = a^{-\frac{11}{12}}$

   c) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = 2^{\frac{2}{15}}$

   d) $\left(\sqrt[8]{5^3} \cdot \sqrt[5]{5^6}\right) : \sqrt[40]{5} = \left(5^{\frac{3}{8}} \cdot 5^{\frac{6}{5}}\right) : \sqrt[40]{5} = \left(5^{\frac{15}{40}} \cdot 5^{\frac{48}{40}}\right) : \sqrt[40]{5} = 5^{\frac{63}{40}} : 5^{\frac{1}{40}} = 5^{\frac{62}{40}} = 5^{\frac{31}{20}}$

8. Ermittle mit Hilfe der Potenzregeln und ohne TR die Lösungmenge der untenstehenden Gleichungen in **Q**.

   a) $9^x = 3 \Rightarrow (3^2)^x = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 0.5$

   b) $8^x = 4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x = 2/3}}$

   c) $1000^x = 0.1 \Rightarrow 10^{3x} = 10^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{x = -1/3}}$

   d) $8^{-0.25} = 2^x \Rightarrow \left(2^3\right)^{-0.25} = 2^x \Rightarrow 2^{-0.75} = 2^x \Rightarrow \underline{\underline{x = -0.75}}$

9. Ermittle die Lösungsmenge der untenstehenden Gleichung, indem Du die Gleichung mit Hilfe der Substitution in eine Gleichung 2.Grades überführst.

   a) $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$
      - $4 \cdot 2^x + 32 = (2^2)^x$
      - $4 \cdot 2^x + 32 = (2^x)^2 \mid 2^x = u$
      - $4 \cdot u + 32 = u^2$
      - $u^2 - 4 \cdot u - 32 = 0$
      - $(u-8)(u+4) = 0$
      - $u_1 = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$
      - $u_2 = -4 \Rightarrow 2^x = -4 \Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
      - $\underline{\underline{\mathbf{L} = \{3\}}}$

   b) $9^{2x} + 3 = 4 \cdot 9^x$

- $(9^x)^2 + 3 = 4 \cdot 9^x \mid 9^x = u$
- $u^2 + 3 = 4 \cdot u$
- $u^2 - 4u + 3 = 0$
- $(u-3)(u-1) = 0$
- $u_1 = 3 \Rightarrow 9^x = 3 \Rightarrow (3^2)^x = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow x = 0.5$
- $u_2 = 1 \Rightarrow 9^x = 1 \Rightarrow x = 0$
- $\underline{\underline{\mathbf{L} = \{0, 0.5\}}}$

c) $3^x + 18 \cdot 3^{-x} = -9$

- $3^x + \frac{18}{3^x} = -9 \mid u = 3^x$
- $u + \frac{18}{u} = -9$
- $u^2 + 18 = -9u$
- $u^2 + 9u + 18 = 0$
- $(u+3)(u+6) = 0$
- $u_1 = -3 \Rightarrow 3^x = -3 \Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
- $u_2 = -6 \Rightarrow 3^x = -6 \Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
- $\underline{\underline{\mathbf{L} = \{\}}}$

10. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch ? Begründe Deine Entscheidung.

a) $2^{500} < 8^{167} \Rightarrow 2^{500} < \left(2^3\right)^{167} \Rightarrow 2^{500} < 2^{501} \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Die Aussage ist wahr}}}$

b) $2^{1000} < 10^{300} \Rightarrow \left(2^{10}\right)^{100} < \left(10^3\right)^{100} \Rightarrow 1024^{100} < 1000^{100} \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Die Aussage ist falsch}}}$

c) $10^{-100} = 100^{-50} \Rightarrow 10^{-100} = \left(10^2\right)^{-50} \Rightarrow 10^{-100} = 10^{-100} \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Die Aussage ist wahr}}}$

d) $(-3^4)^3 = (-3^3)^4 \Rightarrow -3^{12} = 3^{12} \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Die Aussage ist falsch}}}$

e) $2^{-10} < 30^{-2} \Rightarrow \left(2^5\right)^{-2} < 30^{-2} \Rightarrow (32)^{-2} < 30^{-2} \Rightarrow \frac{1}{32^2} < \frac{1}{30^2}$ $\underline{\underline{\text{Die Aussage ist wahr}}}$

11. Forme so um, dass im Schlussergebnis nicht mehr weiter zusammengefasst werden kann und dass keine Klammern und keine negativen Exponenten vorkommen.

a) $(1 + x^{-3})^2 = 1 + 2x^{-3} + x^{-6} = \underline{\underline{1 + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^6}}}$

b) $(x + x^{-1})^3 = (x + x^{-1})^2(x + x^{-1}) = (x^2 + 2 + x^{-2})(x + x^{-1}) = x^3 + x + 2x + 2x^{-1} + x^{-1} + x^{-3} = x^3 + 3x + 3x^{-1} + x^{-3} = \underline{\underline{x^3 + 3x + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}}}$

c) $(x^4 + 2x^{-1})^3 = (x^4 + 2x^{-1})^2(x^4 + 2x^{-1}) = (x^8 + 4x^3 + 4x^{-2})(x^4 + 2x^{-1}) = x^{12} + 2x^7 + 4x^7 + 8x^2 + 4x^2 + 8x^{-3} = x^{12} + 6x^7 + 12x^2 + 8x^{-3} = \underline{\underline{x^{12} + 6x^7 + 12x^2 + \frac{8}{x^3}}}$