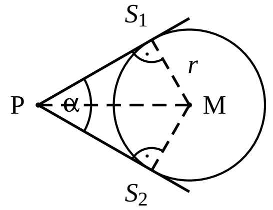
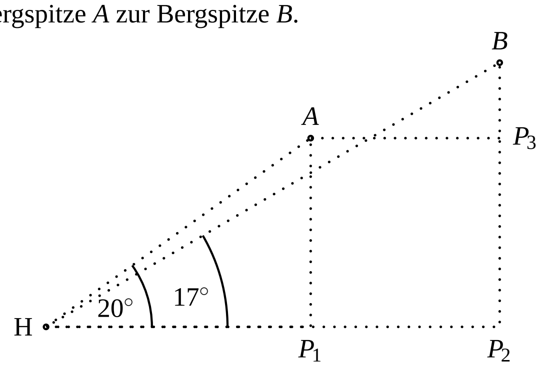
Lösungen A6-A9 Repetition Trigonometrie I

6. Von einem Punkt P sind die Tangenten an den Kreis mit dem Mittelpunkt M und $r = 2.9\,\text{cm}$ gezeichnet. Dabei ist $\overline{MP} = 4\,\text{cm}$. Berechne den Winkel α, den die beiden Tangenten einschliessen.



- $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2.9}{4} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{2.9}{4}\right) \approx 46.47$
- $\underline{\underline{\alpha}} \approx 2 \cdot 46.47 \approx \underline{\underline{92.94^\circ}}$

7. Von einem Haus in einem Tal beobachtet man die Bergspitze B unter dem Höhenwinkel $\beta = 17^\circ$, die Bergspitze A unter dem Höhenwinkel $\alpha = 20^\circ$. Die Bergspitze A liegt 1376 m ü.M., Bergspitze B 1616 m ü.M. und das Haus 887 m ü.M, wobei die Spitzen auf der gleichen Seite des Hauses liegen. Das Haus, die Bergspitzen A und B bilden eine zur Erdoberfläche lotrechte Ebene. Berechne die Entfernung e von der Bergspitze A zur Bergspitze B.



- $\overline{P_1A} = 1376\,\text{m} - 887\,\text{m} = 489\,\text{m}$
- $\overline{P_2B} = 1616\,\text{m} - 887\,\text{m} = 729\,\text{m}$
- $\tan(20^\circ) = \frac{489\,\text{m}}{\overline{HP_1}} \Rightarrow \overline{HP_1} = \frac{489\,\text{m}}{\tan(20^\circ)} \approx 1343.52\,\text{m}$
- $\tan(17^\circ) = \frac{729\,\text{m}}{\overline{HP_2}} \Rightarrow \overline{HP_2} = \frac{729\,\text{m}}{\tan(17^\circ)} \approx 2384.45\,\text{m}$
- $\overline{P_1P_2} = \overline{HP_2} - \overline{HP_1} \approx 2384.45\,\text{m} - 1343.52\,\text{m} \approx 1040.94\,\text{m}$
- $\overline{P_2B} = 1616\,\text{m} - 1376\,\text{m} = 240\,\text{m}$
- $\underline{\underline{\overline{AB}}} = \sqrt{\overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2B}^2} \approx \underline{\underline{1068.24\,\text{m}}}$

8. Berechne den Winkel, den die Raumdiagonale eines Würfels mit einer Kante einschliesst,

   a) wenn die Kantenlänge 10 cm beträgt.
      - Seitendiagonale d: $d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$
      - $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{200}}{10} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{200}}{10}\right) \approx \underline{\underline{54.74^\circ}}$

   b) wenn die Kantenlänge beliebig ist.
      - Seitendiagonale d: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$
      - $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right) \approx \underline{\underline{54.74^\circ}}$

9. Ein Quader hat die Kanten $a = 5\,\text{cm}, b = 4\,\text{cm}$ und $c = 3\,\text{cm}$. Berechne die Winkel α, β und γ, welche die Raumdiagonale des Quaders mit den Kanten a, b und c bildet.

- α bezeichne den Winkel von Raumdiagonale und a, β den Winkel von Raumdiagonale und b und γ den Winkel von Raumdiagonale und c
- Die Raumdiagonale D wird folgendermassen berechnet: $D = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{5^2+4^2+3^2} = \sqrt{50}$
- $\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{50}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) = \underline{\underline{45°}}$
- $\cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{50}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{50}}\right) = \underline{\underline{55.55°}}$
- $\cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{50}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{50}}\right) = \underline{\underline{64.90°}}$