

Repetition quadratische Funktionen (oder Funktionen 2.Grades)

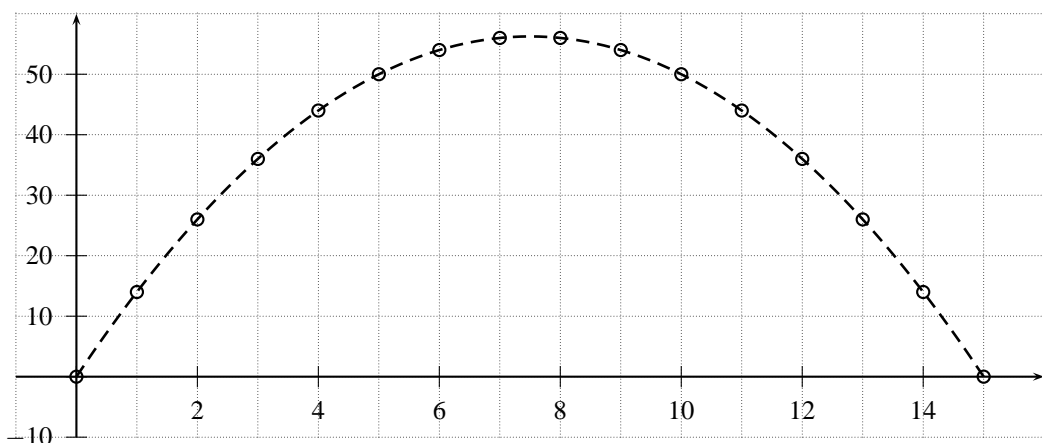
- Ich kenne die Definition einer quadratischen Funktion.
→ Wenn die Vorschrift die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ oder $y = ax^2 + bx + c$ hat, wobei $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbf{R}$.
- Ich weiss, warum die Zahlenbereiche für a, b und c gerade so gewählt wurden.
→ Es soll ein x^2 in der Vorschrift vorkommen, deshalb darf a nicht 0 sein.
- Ich kenne die Bedeutung der Parameter a und c . → a steht für die Richtung und Grösse der Öffnung, c steht für die Schnitthöhe mit der y -Achse.
- Ich kann den Graphen einer Funktion 2.Grades zeichnen, z.B.: bei der Funktion $y = -x^2 + 2x + 3$
- Ich weiss, wie der Graph einer quadratischen Funktion heisst und wie er aussieht.
→ Der Graph heisst Parabel, er ist gekrümmt, Achsensymmetrisch und hat einen Scheitelpunkt.
- Ich kenne die Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion.
→ z.B. $f(x) = (x - 3)^2 + 2$. Der Scheitelpunkt liegt in $S(3|2)$.
- Ich kann Extremwertaufgaben lösen, deren Zielfunktion eine Funktion 2.Grades ist.

Beispiel: Berechne die Seitenlängen des Rechtecks vom Umfang $U = 30$ cm, das den grössten Flächeninhalt besitzt.

- Zunächst einmal überzeugen wir uns davon, dass verschiedene Längen und Breiten zu verschiedenen Flächeninhalten führen:

l in cm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b in cm	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Fläche	0	14	26	36	44	50	54	56	56	54	50	44	36	26	14	0

- Wir tragen alle Flächeninhalte ins untenstehende Koordinatensystem ein:



- Mit Ablesen erkennen wir, dass der maximale Flächeninhalt bei $x = 7.5$ cm erreicht wird.

Wie können wir diesen Wert berechnen ?

- x : Länge, y : Breite
- Zielfunktion: $F(x, y) = xy$

- Nebenbedingung: $U = 2x + 2y = 30 \Rightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$
- $F(x, y) = xy = x(15 - x)$
- $F(x) = x(15 - x)$ ist eine Funktion 2. Grades. Die x -Koordinate Ihres Scheitelpunktes ist die gesuchte Breite.
- $x(15 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 15$
- $S_x = \frac{0+15}{2} = 7.5$
- $y = 15 - x = 7.5$
- Der Flächeninhalt ist maximal, wenn $x = 7.5$ und $y = 7.5$.

Übungen

1. Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen. Drei konkrete Punkte des Graphen müssen sichtbar sein.
 - a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4$
 - b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$
 - c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 3x - 2$
2. **Berechne** bei den obenstehenden Funktionen die Nullstellen und den Scheitelpunkt. Überprüfe anschliessend Dein Ergebnis durch Ablesen am Graphen.
3. Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + bx + c$ geht durch die Punkte $P(3|5)$ und $Q = (7|10)$. Berechne die Parameter b und c .
[$b = -8.75, c = 22.25$]
4. Ein Kugelstösser stösst eine Kugel. Die Flugbahn der Kugel lässt sich mit der folgenden Funktionsvorschrift beschreiben:

$$H(x) = -\frac{1}{35}x^2 + 0.5x + 1.5, \quad x: \text{Stelle am Boden}, H(x): \text{Höhe der Kugel.}$$

- a) An welcher Stelle erreichte die Kugel die maximale Höhe und welche Höhe erreichte die Kugel an dieser Stelle ?
[8.75 m, 3.69 m]
- b) Wie weit wurde die Kugel gestossen ?
[20.11 m]
5. Gegeben ist die Funktion 2. Grades $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Für welche Werte von x gilt: $f(x) \geq 1$?
[$L = [-0.73, 2.73]$]
6. Bestimme den Scheitelpunkt der folgenden quadratischen Funktionen.
 - a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x + 2)^2 - 5$ [(-2| -5)]
 - b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x - 3)^2 + 1$ [(3|1)]
7. Gib eine quadratische Funktion an, deren Scheitelpunkt in
 - a) (3|5) liegt.
 - b) (-2| -4) liegt.
8. Gib eine Funktionsvorschrift an, deren Parabel
 - a) die y -Achse an der Stelle 4 schneidet.
 - b) nach oben geöffnet ist.
 - c) genau 1 Nullstelle hat.
 - d) 2 Nullstellen hat.
 - e) keine Nullstellen hat.
 - f) den Scheitelpunkt $S = (3|4)$ hat.
9. Gegeben ist der Graph der Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 3x - 4$. Der Graph wird nun gespiegelt. Wie lautet die neue Vorschrift, wenn wir den Graphen
 - a) an der x -Achse spiegeln ?
[$-(x + 1.5)^2 + 6.25$]

- b) an der y -Achse spiegeln ? $[(x-1.5)^2 - 6.25]$
c) am Scheitelpunkt spiegeln ? $[-(x+1.5)^2 - 6.25]$
10. Die Summe zweier positiver Zahlen sei 9. Bestimme darunter diejenigen Zahlen, deren Produkt am grössten ist. [4.5 und 4.5]
11. Die Summe aller Kanten einer quadratischen Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) misst 24cm. Berechne die Kanten so, dass die Oberfläche maximal wird. [$a = b = c = 2\text{cm}$]
12. Ein Zaun von 50m Länge soll einen rechteckigen Platz, der an eine Mauer grenzt, auf drei Seiten begrenzen. Welchen Flächeninhalt kann der Platz maximal haben ? [312.5m^2]
13. Eine ebene 400m-Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen begrenzt. Wie gross muss der Radius r sein und wie lang ist ein gerades Stück zwischen den Kurven, wenn
- a) das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben soll ? [100m, 31.83m]
b) das ganze Oval maximalen Flächeninhalt haben soll ? [0m, 63.66m]
14. Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von Fr.12 durchschnittlich 240 BesucherInnen. Würde man den Eintrittspreis um Fr. 1.-,2.-,3.-,usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10,20,30,usw. Personen zurück. Bei welchem Eintrittspreis sind die Einnahmen am grössten ?
15. (Zusatz) Mit einem Faden der Länge u soll der Umfang eines Kreissektors gebildet werden. Für welchen Radius wird die Sektorfläche maximal und wie gross ist dann der Zentriwinkel ?
16. (Zusatz) Finde den Scheitelpunkt der Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ mit Hilfe von quadratischer Ergänzung.