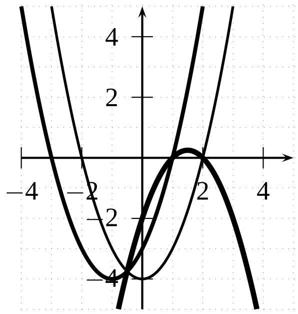
Lösungen Repetition quadratische Funktionen

1. Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen. Drei konkrete Punkte des Graphen müssen sichtbar sein.

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - 4$

   b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 + 2x - 3$

   c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = -x^2 + 3x - 2$



2. **Berechne** bei den obenstehenden Funktionen die Nullstellen und den Scheitelpunkt. Überprüfe anschliessend Dein Ergebnis durch Ablesen am Graphen.

   - Wir nehmen die Vorschrift $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
   - Nullstellen: $0 = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow 0 = (x+3)(x-1) \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1 \Rightarrow N_1(-3|0), N_2(1|0)$.
   - Scheitelpunkt: x-Wert: $(-3+1) : 2 = -1$; y-Wert: $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$ $\Rightarrow S(-1|-4)$

3. Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + bx + c$ geht durch die Punkte $P(3|5)$ und $Q = (7|10)$. Berechne die Parameter b und c.

   - Wir erhalten ein Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{lcl} 5 & = & 9 + 3b + c \\ 10 & = & 49 + 7b + c \end{array} \right| \Rightarrow \underline{\underline{b = -8.75 \text{ und } c = 22.25}}.$$

4. Ein Kugelstösser stösst eine Kugel. Die Flugbahn der Kugel lässt sich mit der folgenden Formel beschreiben:

$$H(x) = -\frac{1}{35}x^2 + 0.5x + 1.5,\ x\text{:Stelle am Boden, } H(x)\text{: Höhe der Kugel.}$$

   a) An welcher Stelle erreichte die Kugel die maximale Höhe und welche Höhe erreichte die Kugel an dieser Stelle ?

   - Nullstellen: $0 = -\frac{1}{35}x^2 + 0.5x + 1.5 \Rightarrow x_1 = 20.11$ und $x_2 = -2.61$
   - arith. Mittel: $(-2.61 + 20.11)/2 = 8.75 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Maximale Höhe an der Stelle 8.75.}}}$
   - $H(8.75) = 3.69 \Rightarrow$ Die Kugel erreichte die maximale Höhe von $\underline{\underline{3.69\text{m}}}$.

   b) Wie weit wurde die Kugel gestossen ?

   - Die Wurfweite entspricht einer Nullstelle: $0 = -\frac{1}{35}x^2 + 0.5x + 1.5 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 20.11}}$ und $x_2 = -2.61$, wobei die zweite Lösung wegfällt.

5. Gegeben ist die Funktion 2.Grades $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ mit $c \in \mathbf{R}$. Für welche Werte von x gilt: $f(x) \geq 1$?

- Wir betrachten die Stellen, wo wir genau 1 erhalten: $1 = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x_1 = -0.73$ und $x_2 = 2.73$.
- Die Parabel ist nach unten geöffnet, deshalb: zwischen $x_1 = -0.73$ und $x_2 = 2.73$ ist der Graph höher als 1.$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\mathbf{L} = (-0.73, 2.73)}}$.

6.

7. Gib eine quadratische Funktion an, deren Scheitelpunkt in

   a) $(3|5)$ liegt. $\Rightarrow$ z.B. $f(x) = (x-3)^2 + 5$

   b) $(-2|-4)$ liegt. $\Rightarrow$ z.B. $f(x) = (x+2)^2 - 4$

8. Gib eine Funktionsvorschrift an, deren Parabel

   a) die y-Achse an der Stelle 4 schneidet. $\Rightarrow c = 4$, z.B. $f(x) = -x^2 + 4$

   b) nach oben geöffnet ist. $\Rightarrow a > 0$, z.B. $f(x) = 2x^2$

   c) genau 1 Nullstelle hat. $\Rightarrow$ SP auf x-Achse, z.B. $f(x) = x^2$ oder $f(x) = (x-2)^2$

   d) 2 Nullstellen hat. $\Rightarrow$ z.B. $f(x) = -x^2 + 4$

   e) keine Nullstellen hat. $\Rightarrow$ z.B. $f(x) = x^2 + 4$

   f) den Scheitelpunkt $S = (3|4)$ hat. $\Rightarrow$ z.B. $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$

9. Gegeben ist der Graph der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 3x - 4$. Der Graph wird nun gespiegelt. Wie lautet die neue Vorschrift, wenn wir den Graphen

   a) an der x-Achse spiegeln ?
   - Scheitelpunkt bestimmen:
     - Nullstellen: $x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-1) = 0 \Rightarrow N_1(-4|0), N_2 = (1|0)$
     - Arith. Mittel: $S_x = \frac{-4+1}{2} = -1.5 \Rightarrow f(-1.5) = -6.25 \Rightarrow S = (-1.5|-6.25)$
   - Nach der Spiegelung ist der Scheitelpunkt an der Stelle $(-1.5|6.25)$.
   - Die neue Vorschrift hat damit die folgende Form: $f_x(x) = (x+1.5)^2 + 6.25$
   - Die Parabel ist nicht mehr nach oben geöffnet, sondern nach unten. Damit ändert sich das Vorzeichen vor der Klammer: $\underline{\underline{f_x(x) = -(x+1.5)^2 + 6.25}}$

   b) an der y-Achse spiegeln ?
   - Nach der Spiegelung ist der Scheitelpunkt an der Stelle $(1.5|-6.25)$.
   - Die neue Vorschrift hat damit die folgende Form: $f_y(x) = (x-1.5)^2 - 6.25$
   - Die Parabel ist weiterhin nach oben geöffnet, somit erhalten wir $\underline{\underline{f_y(x) = (x-1.5)^2 - 6.25}}$

   c) am Scheitelpunkt spiegeln ?
   - Nach der Spiegelung ist der Scheitelpunkt weiterhin an der Stelle $(-1.5|-6.25)$.
   - Die neue Vorschrift hat damit die folgende Form: $f_S(x) = (x+1.5)^2 - 6.25$
   - Die Parabel ist nicht mehr nach oben geöffnet, sondern nach unten. Damit ändert sich wiederum das Vorzeichen vor der Klammer: $\underline{\underline{f_S(x) = -(x+1.5)^2 - 6.25}}$

10. Die Summe zweier positiver Zahlen sei 9. Bestimme darunter diejenigen Zahlen, deren Produkt am grössten ist.

- x: erste Zahl, y: zweite Zahl.
- $P(x,y) = xy$
- $x + y = 9 \Rightarrow x = 9 - y$

- $P(y) = (9-y)y \Rightarrow$ Nullstellen: $(0|0)$ und $(9|0) \Rightarrow$ Mitte bei 4.5
- $\underline{\underline{x = 4.5}} \Rightarrow \underline{\underline{y = 4.5}}$.

11. Die Summe aller Kanten einer quadratischen Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) misst 24 cm. Berechne die Kanten so, dass die Oberfläche maximal wird.

    - a:Quadratseite,b:Säulenhöhe.
    - (O steht für Oberfläche) $O = 2a^2 + 4ab$
    - $4a + 4b + 4a = 24 \Rightarrow 8a + 4b = 24 \Rightarrow 2a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - 2a$
    - $O(a) = 2a^2 + 4a(6-2a) = 2a^2 + 24a - 8a^2 = -6a^2 + 24a = -6(a^2 - 4a) = -6a(a-4)$
    - Nullstellen an den Stellen 0 und 4. Das Maximum ist also an der Stelle 2 $\Rightarrow \underline{\underline{a = 2}}$.
    - $\Rightarrow \underline{\underline{b = 2}}$.

12. Ein Zaun von 50 m Länge soll einen rechteckigen Platz, der an eine Mauer grenzt, auf drei Seiten begrenzen. Welchen Flächeninhalt kann der Platz maximal haben ?

    - x :Länge,y :Breite.
    - Das Produkt soll maximal sein, die Zielfunktion lautet: $Z(x,y) = xy$.
    - Die Nebenbedingung lautet: $x + 2y = 50 \Rightarrow x = 50 - 2y$
    - Einsetzen: $Z(y) = (50 - 2y)y$
    - Nullstellen: $(50-2y)y = 0 \Rightarrow y_1 = 25, y_2 = 0$.
    - S ist beim x-Wert 12.5. $f(12.5) = 312.5 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Der max. Flächeninhalt beträgt } 312.5m^2}}$.

13. Eine ebene 400 m-Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen begrenzt. Wie gross muss der Radius r sein und wie lang ist ein gerades Stück zwischen den Kurven, wenn

    a) das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben soll ?
       - $A = 2lr$
       - $2r\pi + 2l = 400 \Rightarrow r\pi + l = 200 \Rightarrow l = 200 - r\pi$
       - $A(r) = 2(200 - r\pi)r = 400r - 2r^2\pi$
       - $0 = 400r - 2r^2\pi \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 200/\pi$
       - $(0 + 200/\pi)/2 = 100/\pi \Rightarrow$ Maximal bei $r = 100/\pi$.
       - $\underline{\underline{l}} = 200 - \frac{100}{\pi}\pi = \underline{\underline{100\,\mathrm{m}}}$

    b) das ganze Oval maximalen Flächeninhalt haben soll ?
       - $A = 2lr + r^2\pi$
       - $2r\pi + 2l = 400 \Rightarrow r\pi + l = 200 \Rightarrow l = 200 - r\pi$
       - $A(r) = 2(200 - r\pi)r + r^2\pi = 400r - r^2\pi = r(400 - r\pi)$
       - $0 = 200r - r^2\pi \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 400/\pi$
       - $(0 + 400/\pi)/2 = 200/\pi \Rightarrow$ Maximal bei $r = 200/\pi$.
       - $\underline{\underline{l}} = 200 - \frac{200}{\pi}\pi = \underline{\underline{0\,\mathrm{m}}}$ (Es liegt ein Kreis vor)

14. Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von Fr.12 durchschnittlich 240 BesucherInnen. Würde man den Eintrittspreis um Fr. 1.-,2.-,3.-,usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10,20,30,usw. Personen zurück. Bei welchem Eintrittspreis sind die Einnahmen am grössten ?

    - x: Eintrittspreis, y: Besucherzahl
    - Einnahmen: $E = xy$

- $12 \rightarrow 240, 13 \rightarrow 230$. Es liegt eine lineare Zuordnung vor.
  - $f(x) = ax + b$
  - $f(12) = \underline{12a + b = 240}(Gl.1)$, $f(13) = \underline{13a + b = 230}(Gl.2)$
  - TR: $a = -10, b = 360 \Rightarrow f(x) = -10x + 360 \Rightarrow y = -10x + 360$
- $E(x) = x(-10x + 360)$
- $0 = x(-10x + 360) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 36$
- $(0 + 36)/2 = 18 \Rightarrow$ Bei 18 Fr Eintritt sind die Einnahmen am grössten.

15. (Zusatz) Mit einem Faden der Länge u soll der Umfang eines Kreissektors gebildet werden. Für welchen Radius wird die Sektorfläche maximal und wie gross ist dann der Zentriwinkel ?

- r: Radius des Kreises, l_S=Länge des Sektors.
- Sektorfläche: $S = \frac{r^2\pi}{2r\pi} l_S = \frac{r}{2} l_S$
- Nebenbedingung: $2r + l_S = u \Rightarrow l_S = u - 2r$
- $S(r) = \frac{r}{2}(u - 2r)$
- $0 = \frac{r}{2}(u - 2r) \Rightarrow r_1 = 0$ und $r_2 = 0.5u$
- $(0 + 0.5u)/2 = 0.25u \Rightarrow \underline{\underline{r = 0.25u}} \Rightarrow l_S = u - 2 \cdot 0.25u = 0.5u$
- Gesamte Kreisfläche: $(0.25u)^2 \cdot \pi = 0.196u^2 \simeq 360^\circ$
- Fläche des Sektors: $S = \frac{r}{2} l_S = \frac{0.25u}{2} 0.5u = 0.0625u^2 \simeq \alpha$
- $\underline{\underline{\alpha}} = \frac{360^\circ \cdot 0.0625u^2}{0.196u^2} = \underline{\underline{114.8^\circ}}$

16. (Zusatz) Finde den Scheitelpunkt der Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ mit Hilfe von quadratischer Ergänzung.

- $f(x) = 2(x^2 + 2x + 3)$
- $(x + ...)^2 = x^2 + 2x + ... \Rightarrow (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$
- $f(x) = 2((x + 1)^2 - 1 + 3) = 2((x + 1)^2 + 2) = 2(x + 1)^2 + 4$
- Die Vorschrift ist in der Scheitelpunktsform $\Rightarrow \underline{\underline{S = (-1|4)}}$