3.4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Der Begriff Wahrscheinlichkeit wird oft in der Umgangssprache gebraucht. Wir benutzen Wörter wie höchstwahrscheinlich oder unwahrscheinlich mit der Absicht, eine Prognose auszudrücken. Solche qualitativen Ausdrücke sind jedoch für mathematische Berechnungen nicht brauchbar. Geeigneter sind quantitative Aussagen wie:

- „Die Wahrscheinlichkeit, dass Federer gegen Roddick gewinnt, beträgt 80%“.
- „Die Wahrscheinlichkeit, dass Juventus gegen Milan gewinnt, beträgt 51%“

2 Zufallsversuche

Wie der Name schon sagt, hat ein Zufallsversuch etwas mit Zufall zu tun. Zufällig ist etwas, wenn man nicht voraussagen kann, was herauskommen wird.

Beispiel

Wir werfen einen Würfel und schauen, welche Zahl oben liegt.

Bemerkungen

- Wir können nicht voraussagen, welche Zahl oben liegen wird. Deshalb sprechen wir von einem Zufallsversuch.
- Einen möglichen Ausgang des Versuchs nennen wir Ergebnis (hier sind die möglichen Ergebnisse 1,2,3,4,5 oder 6).
- Die Menge aller Ergebnisse nennen wir Ergebnisraum (hier besteht der Ergebnisraum aus 6 Elementen, nämlich 1,2,3,4,5 oder 6).

Die Definitionen:

Definition 1 *Kann man einen Versuch beliebig oft in der gleichen Weise wiederholen und gibt es für den Versuch wenigstens zwei mögliche zufällige Ausgänge, so heisst ein solcher Versuch* ***Zufallsversuch*** *(oder Zufallsexperiment).*

Definition 2 *Ein möglicher Versuchsausgang heisst* ***Ergebnis*** *und wird mit* ω *bezeichnet.*

Definition 3 *Die Menge aller möglichen Versuchsausgänge heisst Ergebnisraum (Stichprobenraum) und wird mit* Ω *bezeichnet.*

Beachte: Der Ergebnisraum kann beim **gleichen Zufallsversuch verschieden** sein. Zum Beispiel kann der Zufallsversuch *„Ein Würfel wird einmal geworfen*“z.B. folgende Ergebnisräume haben:

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $\Omega = \{G, UG\}$
- $\Omega = \{6, \text{ keine } 6\}$

Der Ergebnisraum hängt vom Beobachtungsmerkmal (worauf schauen wir ?) ab.

Schwieriger, weil irreführend, ist der nächste Begriff Ereignis, weil er nicht mit dem alltäglichen Gebrauch übereinstimmt. Im Alltag ist ein Ereignis etwas, was vorgefallen ist. In der Stochastik dagegen ist etwas anderes gemeint. Betrachten wir ein konkretes Beispiel:

Beispiel

Ein Würfel wird einmal geworfen.

Wir wissen bereits, dass der Ergebnisraum $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ist und die einzelnen Elemente (1,2,3,4,5,6) Ergebnisse heissen.

Wir können zum Beispiel auch die Frage stellen: Ist die gewürfelte Zahl grösser als 3 ? In diesem Falle schauen wir nicht nur ein einzelnes Ergebnis an, sondern mehrere zusammen. Dafür gibt es in der Stochastik den Begriff **Ereignis**. Diesen Begriff definieren wir folgendermassen:

Definition 4 *Eine Teilmenge des Ergebnisraums heisst **Ereignis**. Ereignisse kürzen wir mit Grossbuchstaben A,B,C,... ab.*

Es folgt noch ein weiterer wichtiger Begriff. Wir haben wiederum beim fairen Würfel z.B. das Ereignis $A = \{3,4\}$ übrigbleibt. Die Menge der Elemente aus dem Ergebnisraum, die nicht getroffen wurden, heisst **Gegenereignis** von E, abgekürzt $\overline{A}$.

Definition 5 *Gegeben sei ein Ereignis A im Ergebnisraum Ω. Dann heisst das Ereignis $\overline{A}$ Gegenereignis von A, wenn gilt:*

$$A \cup \overline{A} = \Omega \text{ und } A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Der Vollständigkeit halber noch zwei selbsterklärende Begriffe, die wir allerdings kaum gebrauchen werden.

Definition 6 *Der Ergebnisraum selbst heisst **sicheres Ereignis**.*

Definition 7 *Die leere Menge $\emptyset$ heisst **unmögliches Ereignis**.*

Beide Ereignisse sind Teilmengen des Ergebnisraumes.

Übungen

1. Gib bei den folgenden Zufallsversuchen den Ergebnisraum Ω an.

   a) In einer Urne befinden sich 3 weisse, 4 schwarze und 5 blaue Kugeln. Eine Kugel wird nun gezogen. Wir schauen auf die Farbe der Kugel.

   b) In einem Tennisverein werden die Mitglieder folgendermassen eingeteilt: weiblich/männlich, junior/aktiv/senior. Bei einer Preisverleihung wird ein Mitglied gezogen.

      i) Wir schauen aufs Geschlecht und die Alterskategorie.

      ii) Wir schauen nur aufs Geschlecht.

   c) Eine kleine und eine grosse Münze werden gleichzeitig geworfen.

      i) Wir schauen auf beide Münzen.

      ii) Wir schauen, ob zweimal Kopf geworfen wurde.

   d) Aus allen Schweizer Familien mit drei Kindern wird eine Familie ausgelost und die Geschlechtsverteilung der Kinder notiert.

2. Ein Würfel mit den Augenzahlen von 1-6 wird geworfen. Entscheide, ob es sich bei den folgenden Sätzen um ein Ergebnis handelt. Gib jeweils das Gegenereignis an.
   a) Die geworfene Augenzahl beträgt 3.
   b) Die geworfene Augenzahl ist kleiner als 3.
   c) Die geworfene Augenzahl ist grösser als 5.
   d) Die geworfene Augenzahl ist 3 oder 4.
   e) Die geworfene Augenzahl ist gerade.
3. Ein Glücksrad mit den Zahlen 1-10 wird gedreht. Formuliere die folgenden Ereignisse und die dazugehörigen Gegenereignisse in Worten:
   a) $\{4,5\}$
   b) $\{1,2,3,4\}$

Was ich in diesem Abschnitt gelernt habe

- Ich weiss, was ein Zufallsversuch ist.

  $\rightarrow$ Der Ausgang des Versuchs ist zufällig, kann nicht vorausgesehen werden
- Ich weiss, was ein Ergebnis ist.

  $\rightarrow$ Ein möglicher Ausgang des Zufallsversuchs.
- Ich weiss, was ein Ergebnisraum ist.

  $\rightarrow$ Die Menge aller möglicher Ausgänge.
- Ich weiss, was ein Ereignis ist.

  $\rightarrow$ Eine Teilmenge des Ergebnisraumes. Besteht diese Teilmenge aus einem Element, dann liegt als Spezialfall ein Ergebnis vor.
- Ich weiss, was einen Gegenereignis ist.

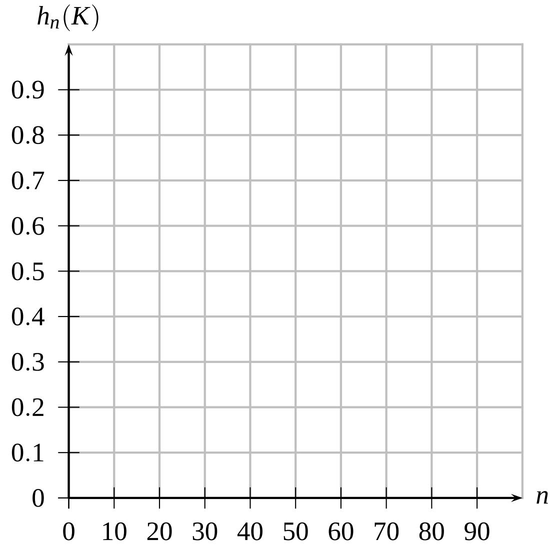
  $\rightarrow$ Zu jedem Ereignis A gibt es ein Gegenereignis $\overline{A}$. Es gilt $A \cup \overline{A} = \Omega$ (Das Ereignis vereinigt mit dem Gegenereignis ergibt gerade den Ergebnisraum).

3 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist uns aus dem Alltag geläufig. Wir drücken eine Wahrscheinlichkeit meist in % aus.

Die Tabelle zeigt die Ergebnisse (Kopf K oder Zahl Z) einer Serie von Münzwürfen. Dabei bedeutet n die Anzahl Würfe, $a_n(K)$ die absolute Häufigkeit von Kopf (wie oft wurde Kopf geworfen) und $h_n(K) = \frac{a_n(K)}{n}$ die relative Häufigkeit des Ergebnisses Kopf in n Versuchen (Anteil der Köpfe im Vergleich zu der Anzahl der Würfe). Der Graph zeigt das Häufigkeitsdiagramm.

Urliste					n	$a_n(K)$	$h_n(K)$
K	Z	Z	Z	K	5	2	0.40
K	K	K	K	K	10	7	0.70
K	Z	K	Z	K	15	10	0.67
K	Z	K	K	K	20	14	0.70
Z	Z	Z	Z	Z	25	14	0.56
K	K	K	K	K	30	19	0.63
K	K	K	Z	K	35	23	0.66
Z	K	Z	Z	Z	40	24	0.60
K	Z	Z	Z	Z	45	25	0.56
Z	K	Z	Z	K	50	27	0.54



Die relative Häufigkeit $h_n(K)$ des Ergebnisses Kopf stabilisiert sich nach anfänglichen Schwankungen und nähert sich mit wachsender Versuchszahl n dem Wert 0.5. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit mit wachsender Versuchszahl bezeichnet man als das **empirische Gesetz der grossen Zahlen**. Es wurde von Jakob Bernoulli 1688 entdeckt. Den **Stabilisierungswert** der relativen Häufigkeiten eines Ergebnisses bezeichnet man als **Wahrscheinlichkeit** des Ergebnisses. Die Wahrscheinlichkeit wird abgekürzt mit P (probability). Dieser Stabilisierungswert lässt sich meist mit Hilfe der Geometrie des Versuchsobjektes berechnen (fairer Würfel, faire Münze, Glücksrad,...) oder mit der Anzahl der vorhandenen Objekte (Topf mit 3 grünen und 2 blauen Kugeln,...).

Bei unserem Beispiel betragen diese Stabilisierungswerte sowohl für Kopf als auch für Zahl 0.5 (P(Kopf) = 0.5 und P(Zahl) = 0.5). Wir können sicher sagen:

- Die Wahrscheinlichkeit von jedem Ergebnis liegt zwischen ....

- Die Wahrscheinlichkeit von allen Ergebnissen aufsummiert ergibt ...

Definition 8 *Gegeben sei ein Zufallversuch mit dem Ergebnisraum* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. *Eine Zuordnung P, die jedem Ergebnis* ω_i *genau eine reelle Zahl zuordnet, heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn folgende Bedingungen gelten:*

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$, *für* $1 \leq i \leq n$
- $P(\omega_1) + ... + P(\omega_n) = 1$

Die Zahl $P(\omega_i)$ *heisst dann Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses* ω_i.

Beispiel

Betrachten wir noch einmal den Würfel. Die Wahrscheinlichkeit für eine der Zahlen von 1-6 beträgt jeweils 1/6. 1/6 liegt zwischen 0 und 1, ausserdem ist $6 \cdot 1/6 = 1$.

Wir brauchen dieses Beispiel gleich für die nächste

Frage: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mit einem fairen Würfel eine Zahl grösser als vier gewürfelt wird ?

Wir können nun einen ersten Satz aufstellen:

Satz 1 *Gegeben sei ein Zufallsversuch mit dem Ergebnisraum* Ω. $E = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$ *sei ein beliebiges Ereignis. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit von* E*:*

$$P(E) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_k)$$

Sonderfälle:

- $P(E) = 0,$ *falls* $E = \emptyset$ *(unmögliches Ereignis)*
- $P(E) = 1,$ *falls* $E = \Omega$ *(sicheres Ereignis)*

Übungen

4. Liegt in der untenstehenden Tabelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vor ?

Z	1	2	3
P	1/4	1/3	1/2

5. Beim Roulettespiel bleibt die Kugel auf einem der 37 gleichgrossen Sektoren stehen. Je 18 Felder sind rot bzw. schwarz, das Feld mit der Zahl 0 ist grün. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel
   a) auf dem Feld mit der 17 stehenbleibt ?
   b) auf einem schwarzen Feld stehenbleibt ?

6. In einer Lostrommel befinden sich der Haupttreffer (H), 6 Gewinne (G), 20 Trostpreise (T) und 13 Nieten (N), wobei die Gewinne, Trostpreise und Nieten nicht unterschieden werden. Isabelle ist Glücksfee und zieht ein Los. Bestimme den Ergebnisraum Ω und gibt für jedes Ergebnis ω die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.

7. Ein Schlaumeier manipuliert einen fairen Spielwürfel, indem er aus der Drei durch Hinzufügen von zwei weiteren Augen eine Fünf macht. Nun wird der Würfel einmal geworfen.
   a) Bestimme den Ergebnisraum und gib für jedes Ergebnis die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.
   b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die Augenzahl ist grösser als 4 “
   c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die Augenzahl ist nicht 5 “
   d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die Augenzahl ist gerade “

8. Zwei unterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen. Jede zeigt entweder „Kopf“ K oder „Zahl“ Z an.
   a) Bestimme Ω und gib für jedes Ergebnis die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.
   b) Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „KK oder ZZ “
   c) Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „mindestens ein K “.

   [b) 0.5;c) 0.75]

9. In einem Gefäss liegen 4 schwarze, 6 rote und 8 blaue Kugeln. Claudio zieht, ohne hinzusehen, eine Kugel. Das Ergebnis dieses Zufallsexperimentes ist somit die Farbe der gezogenen Kugel. Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „die Farbe ist nicht blau “.

4 Der Laplace-Zufallsversuch (oder Laplace-Experiment)

Definition 9 *Ein Zufallsversuch heisst Laplace-Zufallsversuch, wenn* ***alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit*** *haben.*

Beispiel: Ein fairer Würfel (auch Laplace-Würfel genannt) wird einmal geworfen.

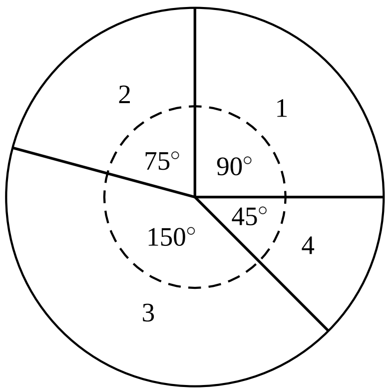
Wir erhalten folgende Tabelle (**Wahrscheinlichkeitsverteilung**)

AZ	1	2	3	4	5	6
P(AZ)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Folgende Bemerkungen:

- Alle Wahrscheinlichkeiten sind gleich gross, deshalb handelt es sich um einen Laplace-Versuch. Eine solche Verteilung wird **Gleichverteilung** oder **Laplace-Verteilung** genannt.
- Die Summe von allen Wahrscheinlichkeiten ergibt 1.
- z.B. gilt: $P(\text{eine 3 oder eine 5 wird gewürfelt}) = P(\text{eine 3 wird gewürfelt}) + P(\text{eine 5 wird gewürfelt}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (in diesem Falle ist das Ereignis „eine 3 oder eine 5 wird gewürfelt“) ist also die Summe der Wahrscheinlichkeiten der dazugehörigen Ergebnisse.
- Bei einem Laplace-Experiment lässt sich eine Wahrscheinlichkeit vereinfacht folgendermassen berechnen:
$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der zu E gehörigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl von allen möglichen Ergebnissen}} = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}}$$
Wir übertragen diese Formel auf unser Beispiel:
$$P(\text{eine 3 oder eine 5 wird gewürfelt}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Beachte, dass obige Formel nur bei Laplace-Versuchen gilt ! Überzeugen wir uns davon bei folgendem Beispiel. Untenstehendes Glücksrad wird einmal gedreht:



Wir erhalten folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung

Z	1	2	3	4
P(Z)				

Wir beobachten:

- Wenn wir alle Wahrscheinlichkeiten miteinander addieren, erhalten wir 1.
- Wieder können die Wahrscheinlichkeiten addiert werden, z.B.:
  $P(1 \text{ oder } 4) = P(1) + P(4) = \frac{90}{360} + \frac{45}{360} = \frac{135}{360}$
- Was im Gegensatz zum Würfelversuch (oder allgemein im Gegensatz zu einem Laplace-Versuch) nicht mehr geht, ist die Formel P = günstige Fälle/mögliche Fälle. Wir würden 2/4 erhalten (2 für die günstigen Fälle 1 und 4, 4 weil es die vier möglichen Fälle 1,2,3,4 gibt), was offensichtlich falsch ist.

Übungen

10. Entscheide, ob eine Laplace-Verteilung vorliegt.
    a) Roulettespiel, wir schauen auf welcher Farbe die Kugel zu stehen kommt.
    b) Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1,2,4,5,5,6. Wir schauen, welche Zahl gewürfelt wird.
    c) Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1,2,4,5,5,6. Wir schauen, ob die gewürfelte Zahl gerade oder ungerade ist.
    d) Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1,2,4,5,5,6. Wir schauen, ob die gewürfelte Zahl grösser 4 ist.
    e) Zwei faire unterscheidbare Münzen werden geworfen. Wir schauen, welche zwei Bilder liegen (KK, KZ, ZK, ZZ).
    f) In einem Gefäss liegen 4 schwarze, 6 rote und 8 blaue Kugeln. Eine Kugel wird gezogen. Wir schauen auf die Farbe der Kugel.
    g) Schweizer Lottospiel (6 aus 45). Wir schauen, welche Zahlen gezogen wurden.
    h) Aus einem Jasskartenspiel wird eine Karte gezogen. Wir schauen auf die Farbe (Eichel, Schellen, Schaufel, Rose) der Karte.
    i) Aus einem Jasskartenspiel wird eine Karte gezogen. Wir schauen auf die „Höhe“(Neun, Ass,...) der Karte.
    j) Ein blauer und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir schauen auf die Summe der beiden Augenzahlen.
11. Wir greifen aus einem Jasskartenspiel (36 Karten, 4 Farben) eine Karte heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft das folgende Ereignis ein ?
    a) Eine Eichelkarte wird gezogen.
    b) Das Rosenass wird gezogen.
    c) Ober oder König wird gezogen.
12. Beim Schweizer Lotto werden aus 45 Zahlen deren 6 gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,
    a) sechs richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.00000012]
    b) fünf richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.00002873]
    c) vier richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.00136463]
    d) drei richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.02244060]

e) zwei richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.15147402]

f) eine richtige Zahl anzukreuzen ? [0.42412726]

g) keine richtige Zahl anzukreuzen ? [0.40056463]

13. Ein Jasskartenspiel besteht aus 36 Karten. Ein Spieler erhält nun 9 Karten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) alle vier Bauern hat ? [0.00214]

b) drei Damen hat ? [0.03850]

c) keinen König hat ? [0.29794]

d) zwei Bauern und zwei Asse hat ? [0.037582]

14. Ein Pokerspiel enthält 52 Karten. Bei der Pokervariante Five Card draw erhält ein Spieler 5 Karten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) ein Royalflash (Ass, König, Dame, Bube, Zehn der gleichen Farbe) hat ? [0.0000015]

b) ein Fullhouse (ein Drilling und ein Zwilling) hat ? [0.0014406]

c) einen Doppelzwilling (zwei Zwillinge) hat ? [0.0475390]

d) einen Drilling hat (die verbleibenden zwei Karten dürfen kein Zwilling sein) ? [0.0211285]

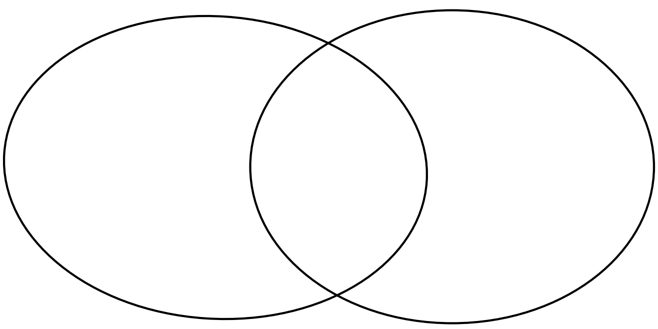
4.1 Die Summenregel

Einführungsaufgabe

Aus einer Urne mit 20 gleichen Kugeln, die von 1 bis 20 nummeriert sind, wird eine Kugel zufällig gezogen. Fülle die untenstehende Tabelle aus:

Ereignis	Eigenschaft	Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit
A	Die Zahl ist durch zwei teilbar	2,4,6,8,10,12,14,16,18,20	
B	Die Zahl ist durch drei teilbar	3,6,9,12,15,18	
C	Die Zahl ist durch zwei oder drei teilbar	2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20	
D	Die Zahl ist durch 2 und durch 3 teilbar	6,12,18	

Zeichne die Ereignisse A und B in die untenstehenden Mengendiagramme:



- Lässt sich eine Gleichung aufstellen mit P(A),P(B),P(C) und P(D) ?

Satz 2 *Gegeben sei eine Zufallsversuch. Dann gilt für zwei Ereignisse A und B dieses Zufallsversuchs die folgende Beziehung:*

Übungen

15. Wir greifen aus einem Jasskartenspiel (36 Karten, 4 Farben) eine Karte heraus. Berechne mit Hilfe der Summenformel jeweils die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse.
    a) Schaufelkarte oder König [1/3]
    b) Rosenkarte oder eine Karte höher als die Bauernkarte (Dame, König, Ass) [1/2]
    c) Ober oder König [2/9]
16. Ein blauer und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechne mit Hilfe der Summenformel die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	(1 6)
(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	(2 5)	(2 6)
(3 1)	(3 2)	(3 3)	(3 4)	(3 5)	(3 6)
(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	(4 5)	(4 6)
(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

    a) „Der eine oder andere Würfel zeigt Augenzahl grösser als 4.“ [5/9]
    b) „Der eine oder andere Würfel zeigt eine gerade Augenzahl.“ [3/4]
17. Ein Jasskartenspiel besteht aus 36 Karten. Davon werden 9 Karten an einen Spieler verteilt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler
    a) genau 3 Asse oder genau 3 Könige in den Händen hält ? [≈ 0.076]
    b) genau einen Buben oder genau eine Dame in den Händen hält ? [≈ 0.693]

4.2 Die Komplementärregel

Ein blauer und ein roter Würfel werden geworfen. Folgende Ergebnisse sind möglich:

(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	(1 6)
(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	(2 5)	(2 6)
(3 1)	(3 2)	(3 3)	(3 4)	(3 5)	(3 6)
(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	(4 5)	(4 6)
(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

- Wir betrachten folgendes Ereignis: A = „zwei verschiedene Zahlen werden geworfen“ ? Umrande alle Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, mit einer Farbe. Berechne anschliessend P(A).
- Wir betrachten folgendes Ereignis: B = „zwei gleich Zahlen werden geworfen“ ? Umrande alle Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, mit einer anderen Farbe. Berechne anschliessend P(B).
- Wie hängen die Ereignisse A und B zusammen ?

- Wie hängen P(A) und P(B) zusammen ?

Wir notieren die **Komplementärregel**:

Satz 3 *Es liege ein Zufallsversuch vor, dazu das Ereignis A dieses Zufallsversuchs und das dazugehörige Gegenereignis $\overline{A}$. Dann gilt:*

Übungen

18. Ein blauer und ein roter Würfel werden geworfen (s. Tabelle). Berechne mit der Komplementärregel die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

    a) „Die Augensumme ist kleiner als 9“ [13/18] b) „Die Augensumme ist grösser als 4“ [5/6]

19. Drei unterscheidbare faire Würfel werden geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme kleiner als 16 ist ? [206/216=0.954]

20. Ein Jasskartenspiel besteht aus 36 Karten, ein Spieler erhält 9 Karten, Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler nicht alle 4 Asse in den Händen hält ? [0.999]

5 mehrstufige Zufallsversuche

Definition 10 *Denkt man sich mindestens zwei Versuche, die man nacheinander oder auch gleichzeitig durchführen kann, zu einem Versuch zusammengefasst, so nennt man dies einen **zusammengesetzten Versuch**.*

Beispiele

- Ein(e) Würfel/Münze/Glücksrad wird dreimal nacheinander geworfen(gedreht).
- Eine Münze wird geworfen, anschliessend wird ein Würfel geworfen.

Mehrstufige Zufallsversuche lassen sich mit sogenannten Baumdiagrammen darstellen: Als Beispiel nehmen wir einen fairen Würfel der dreimal nacheinander geworfen wird. Da wir unbedingt eine sechs benötigen (z.B. um ein Spiel zu beenden), schauen wir nur darauf, ob eine sechs eintrifft oder ob keine 6 eintrifft.

Bei Baumdiagrammen gelten zwei grundlegende Regeln:

Folgendermassen können wir kontrollieren, ob wir die Wahrscheinlichkeiten richtig ausgerechnet haben:

Übungen

21. Eine gezinkte Münze (P(W)=0.4, P(Z)=0.6) wird zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
    a) genau 2 mal Wappen [0.16] b) höchstens 1 mal Wappen [0.84]
22. Eine fairer Würfel wird dreimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
    a) genau 2 mal sechs [0.0694] b) höchstens 2 mal sechs [0.9954]
23. Bei einem Multiple-Choise-Test mit 3 Fragen kann man bei jeder Frage zwischen 4 Antworten wählen, wobei genau eine Antwort richtig ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mit vollständigem Raten
    a) genau 2 Antworten richtig hat ? [≈ 0.14]
    b) nur eine Antwort richtig hat ? [≈ 0.42]
    c) mindestens eine Antwort richtig hat ? [≈ 0.58]
24. Bei einer Produktionskontrolle werden in drei Prüfungsgängen Länge, Breite und Höhe eines Metallstücks geprüft. Diese sind mit den Wahrscheinlichkeiten 0.2 (Länge), 0.1 (Breite) und 0.15 (Höhe) ausserhalb der vorgegebenen Toleranzgrenzen. Ein Metallstück wird nicht ausgeliefert, wenn mindestens zwei der Kontrollen negativ ausgehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein kontrolliertes Stück Ausschussware ? [0.059]

Was ich in diesem Abschnitt gelernt habe

- Ich weiss, was ein mehrstufiges Zufallsexperiment ist und kann ein Beispiel geben.

→ Wenn ein Zufallsexperiment mehrmals durchgeführt wird oder verschiedene Zufallsexperiment nacheinander durchgeführt werden. Z.B. mehrmaliges Würfeln, mehrfacher Münzwurf, Würfeln/Münze werfen/Würfeln, usw.

- Ich weiss, was ein Baumdiagramm ist und wozu ich es gebrauchen kann.

  → Mit Baumdiagrammen können mehrstufige Zufallsexperimente dargestellt und Berechnungen durchgeführt werden.

- Ich kenne die Pfadmultiplikationsregel

  → Entlang von Pfaden wird multipliziert.

- Ich kenne die Pfadadditionsregel

  → Wahrscheinlichkeiten von Pfaden werden addiert.

6 Lösungen

1. a) $\Omega = \{w, s, b\}$
   b) i) $\Omega = \{wj, wa, ws, mj, ma, ms\}$
      ii) $\Omega = \{w, m\}$
   c) i) $\Omega = \{Kk, Kz, Zk, Zz\}$
      ii) $\Omega = \{Kk, \text{nicht } Kk\}$
   d) $\Omega = \{KKK, KKM, KMM, MMM\}$
2. a) ja; die geworfene AZ ist keine 3
   b) nein; die geworfene AZ ist grösser als 2
   c) ja; die geworfene AZ ist kleiner als 6
   d) nein; die geworfene AZ ist weder 3 noch 4
   e) nein; die geworfene AZ ist ungerade
3. a) Eine 4 oder 5 wird gedreht
   b) Eine Zahl kleiner 5 wird gedreht
4. nein, weil die Summe der Wahrscheinlichkeiten nicht 1 ergibt
5. a) P(auf 17) = 1/37 b) P(auf schwarz) = 18/37
6. $\Omega = \{H, G, T, N\}; P(H) = 1/40 = 0.025, P(G) = 6/40 = 0.15, P(T) = 20/40 = 0.5, P(N) = 13/40 = 0.325$
7. a)

AZ	1	2	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	2/6	1/6

   b) $P(AZ > 4) = 3/6 = 0.5$
   c) $P(AZ \neq 5) = 4/6 = 2/3$
   d) $P(\text{AZ gerade}) = 3/6 = 0.5$
8. a)

	KK	KZ	ZK	ZZ
P	1/4	1/4	1/4	1/4

   b) $P(\text{KK oder ZZ}) = 1/4 + 1/4 = 0.5$
   c) $P(\text{mind. ein K}) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 0.75$
9. P(Die Farbe ist nicht blau) = 5/9
10. a) nein
    b) nein
    c) ja
    d) ja
    e) ja
    f) nein
    g) ja
    h) ja
    i) ja
    j) nein
11. a) 0.25
    b) $1/36$
    c) $2/9$