

3.3 Kombinatorik

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Die Produktregel	2
3	Probleme, bei denen die Reihenfolge berücksichtigt wird	2
3.1	Erster Aufgabentyp-mit Wiederholung	2
3.2	Zweiter Aufgabentyp-ohne Wiederholung	3
4	Probleme, bei denen die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird-erster Aufgabentyp-ohne Wiederholung	5
5	vermischte Aufgaben zu den obenstehenden Aufgabentypen	7
6	Aufgaben, die sich aus den obenstehenden Aufgabentypen zusammensetzen	7
6.1	Typ 1-Dividieren	7
6.2	Typ 2-Produktregel	8
7	Probleme, bei denen die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird-zweiter Aufgabentyp-mit Wiederholung	9

1 Einführung

Im Wort Kombinatorik steckt das Wort Kombination, welches aus dem Alltag geläufig ist:

- Wie viele Gewinnkombinationen sind möglich (z.B. beim Lottospiel) ?
- Wie viele mögliche Kombinationen hat ein Zahlenschloss ?
- Wie viele Kombinationen muss man höchstens durchprobieren, um einen Tresor zu knacken ?

Grundsätzlich geht es in der Kombinatorik also um Zählprobleme. In der Mathematik wird der Begriff „Kombination“ differenzierter gebraucht im Vergleich zum Alltag. Die Anzahl Möglichkeiten werden nicht immer Kombinationen genannt, sondern nur unter bestimmten Voraussetzungen. Wir unterscheiden die Zählprobleme grob in zwei Sorten: Wir die Reihenfolge berücksichtigt oder nicht ?

2 Die Produktregel

Aufgabe 1 In einem französischen Restaurant werden bei einem Menü mit 4 Gängen Auswahlmöglichkeiten angeboten: zuerst ein Salat oder eine Suppe, anschliessend 4 verschiedene Vorspeisen, 3 Hauptspeisen und 5 Desserts.

- Worin unterscheidet sich die Aufgabe von den Einführungsaufgaben 1.1 und 1.2 ?
- Wie viele Bestellmöglichkeiten gibt es, wenn kein Gang ausgelassen wird ?

Übungen

1. Eine Firma verkauft den Bürostuhl „Capo“ in 3 verschiedenen Grössen und in 6 verschiedenen Farben. Ferner kann der Kunde wählen, ob der Stuhl fahrbar sein soll oder nicht. Wie viele verschiedene Bürostühle des Modelles „Capo“ bietet die Firma zum Verkauf an ? [36]
2. Ein Sportgeschäft verkauft Schlittschuhe für Damen und für Herren in je 2 Qualitäten und 20 verschiedenen Schuhgrössen. Wie viele Schlittschupaare muss das Geschäft am Lager haben, wenn jedes mögliche Paar dreifach vorhanden sein soll ? [240 Paare]

3 Probleme, bei denen die Reihenfolge berücksichtigt wird

3.1 Erster Aufgabentyp-mit Wiederholung

Der Fachbegriff für diesen Aufgabentyp: **Variation mit Wiederholung**.

Aufgabe 2.1 Ein Zahlenschloss hat 2 Reihen, jeweils mit den Ziffern von 1 bis 5.

- Begründe, warum die Reihenfolge wesentlich ist.
- Wieviele Zahlenkombinationen sind möglich ?

Übungen

3. Wie viele 5-stellige Zahlen kann man unter ausschliesslicher Verwendung der Ziffern 1,2,3 bilden ?
[243]
4. Ein roter und ein blauer Würfel mit den Zahlen von 1-6 werden geworfen. Wieviele Zahlenkombinationen (z.B. roter Würfel 3,blauer Würfel 2) sind möglich ?
[36]
5. Ein Morse-Zeichen wird mit Punkten und Strichen gebildet. Beispiele:

$A : \cdot - \quad B : - \cdot \cdot \cdot \quad I : \cdot \cdot \quad T : - \quad Z : - - \cdot \cdot$

- a) Wie viele 3-stellige Morsezeichen sind möglich ?
[8]
- b) Wie viele höchstens 4-stellige Morsezeichen sind möglich ?
[30]

3.2 Zweiter Aufgabentyp-ohne Wiederholung

Der Fachbegriff für diesen Aufgabentyp: **Variation ohne Wiederholung**.

Aufgabe 2.2 Bei einem Gewinnspiel mit vier verschiedenen Preisen (Fahrrad,Reise,Uhr,Kette) nehmen 10 Leute teil. Dabei kann ein Teilnehmer höchstens einen Preis gewinnen.

- Begründe, warum die Reihenfolge wesentlich ist.
- Auf wieviele Arten können die Preise auf die Teilnehmer verteilt werden ?

Übungen

6. In einem Raum befinden sich sieben fest montierte Stühle.

13	15	17	19	21	23
14	16	18	20	22	24

- a) Wieviele Sitzanordnungen sind möglich, wenn die Personen zusammen in einem Abteil sitzen?
[144]
- b) Wieviele Sitzanordnungen sind möglich, wenn sich jede Person ihr eigenes Abteil nimmt?
[92160]
- c) Wieviele Sitzanordnungen sind möglich, wenn sich je zwei Schülerinnen (deren Zusammensetzung bestimmt ist) in ein eigenes Abteil setzen?
[4320]

4 Probleme, bei denen die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird- erster Aufgabentyp-ohne Wiederholung

Der Fachbegriff für diesen Aufgabentyp: **Kombinationen ohne Wiederholung**.

Aufgabe 2

Ein Schüler hat fünf ungelesene Bücher (Goethe, Mann, Hesse, Dürrenmatt, Frisch), von denen er drei mit in den Urlaub nehmen will. Wieviele Möglichkeiten hat er? Als Hilfe sind unten schon mal alle möglichen Dreierkonstellationen aufgelistet:

GMH	MGH	HGM	DGM	FGM
GMD	MGD	HGD	DGH	FGH
GMF	MGF	HGF	DGF	FGD
GHM	MHG	HMG	DMG	FMG
GHD	MHD	HMD	DMH	FMH
GHF	MHF	HMF	DMF	FMD
GDM	MDG	HDG	DHG	FHG
GDH	MDH	HDM	DHM	FHM
GDF	MDF	HDF	DHF	FHD
GFM	MFG	HFG	DFG	FDG
GFH	MFH	HFM	DFM	FDM
GFD	MFD	HFD	DFH	FDH

Übungen

14. Gegeben sei die Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$. Wieviele 4-elementige Teilmengen hat diese Menge? [15]
15. Ein Mini-Lottospiel besteht aus 5 Kugeln (von 1 bis 5 nummeriert), von denen 3 gezogen werden. Wieviele verschiedene Gewinnkombinationen gibt es? [10]
16. In einem Raum befinden sich 7 Personen, die gegenseitig auf das neue Jahr anstossen. Wie oft klingen die Gläser? [21]
17. 5 weiße und 3 schwarze Kugeln sollen auf 8 Plätze gelegt werden. Wieviele Anordnungsmöglichkeiten gibt es? [56]

Auch der obige Aufgabentyp kommt sehr häufig vor, weshalb für Terme wie $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ ebenfalls ein eigenes Symbol entwickelt wurde.

Wir definieren:

5 vermischte Aufgaben zu den obenstehenden Aufgabentypen

22. Auf einem Parkplatz sind noch 6 Parkplätze frei. Gleichzeitig kommen
- 3 unterscheidbare Autos an.
 - 3 nicht unterscheidbare Autos an.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, die freien Parkplätze den ankommenden Autos zuzuteilen ? [120,20]
23. In einem Schachturnier mit 10 Teilnehmern spielt jeder gegen jeden einmal. Wieviele Partien werden gespielt ? [45]
24. Bei einem Klassenlager werden 6 Schüler aus einer Klasse von 20 Schülern für Arbeiten in der Küche benötigt. Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es ? [38760]
25. Ein Hotel hat 10 freie Zimmer. Am Abend kommen 7 Personen an, die alle ein Einzelzimmer belegen möchten. Auf wieviele Arten können die 7 Personen auf die Zimmer verteilt werden ? [604800]
26. Wie viele 5-stellige
- Zahlen mit lauter ungeraden Ziffern gibt es ? [3125]
 - Zahlen mit lauter verschiedenen Ziffern gibt es ? [27216]
 - Zahlen mit lauter verschiedenen ungeraden Ziffern gibt es ? [120]
 - Zahlen mit lauter geraden Ziffern gibt es ? [2500]
 - gerade Zahlen gibt es ? [45000]
 - Zahlen mit lauter verschiedenen geraden Ziffern gibt es ? [96]
27. Im Schweizer Lottospiel werden aus 45 Kugeln sechs gezogen.
- Wieviele verschiedene Gewinnkombinationen gibt es ? [8145060]
 - Wieviele verschiedene Gewinnkombinationen gäbe es, wenn die Reihenfolge berücksichtigt würde ? [$\approx 5.86 \cdot 10^9$]
28. Urs warf eine Münze 30-mal. Dabei erhielt er 18-mal Kopf. Wie viele verschiedene Sequenzen der Länge 30 enthalten genau 18-mal Kopf ? [8.64 · 10⁷]
29. Ein Kartenspiel enthält 36 verschiedene Karten. Spieler Klaus erhält 9 Karten. Ein solcher Satz Karten heiße ein Blatt. Wie viele Blätter sind möglich ? [94143280]
30. Beim Kegeln gilt es, mit einer Kugel möglichst viele Kegel umzuwerfen.
- Wie viele Wurfbilder mit vier gefallenem Kegeln gibt es theoretisch ?
 - Wie viele Wurfbilder mit 3 stehen gebliebenen Kegeln gibt es theoretisch ?
 - Wie viele Wurfbilder sind insgesamt theoretisch möglich ?
- [126,84,512]

6 Aufgaben, die sich aus den obenstehenden Aufgabentypen zusammensetzen

6.1 Typ 1-Dividieren

Wieviele „Wörter“ lassen sich mit den Buchstaben des Wortes OTTO bilden ? [6]

Übungen

31. Wieviele „Wörter“ lassen sich mit den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden ? [34650]
32. Wir haben 4 rote, 3 schwarze und 2 weiße Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden lassen. Auf wieviele Arten können diese Kugeln auf 9 Plätze gesetzt werden ?

6.2 Typ 2-Produktregel

Einführungsaufgabe

Ein Kilometerzähler besteht aus fünf Stellen. An jeder Stelle kann eine der Ziffern von 0-9 stehen.

- Wieviele Kilometerstände mit sind möglich, wenn keine Zwei vorkommen darf ?
- Wieviele Kilometerstände mit sind möglich, wenn genau eine Zwei vorkommen muss ?
- Wieviele Kilometerstände mit sind möglich, wenn genau zwei Zweien vorkommen müssen ?
- Wieviele Kilometerstände mit sind möglich, wenn genau drei Zweien vorkommen müssen ?
- Wieviele Kilometerstände mit sind möglich, wenn genau vier Zweien vorkommen müssen ?
- Wieviele Kilometerstände mit sind möglich, wenn genau fünf Zweien vorkommen müssen ?

Übungen

33. Wieviele Zahlenkombinationen mit genau zwei richtigen Zahlen sind beim Schweizer Lotto möglich ? [1233765]
34. Ein Verein von 20 Frauen und 16 Männern bildet eine Kommission mit 5 Frauen und 4 Männern. Wie viele Möglichkeiten gibt es dazu ? [28217280]
35. Jemand zieht 9 Karten auf einem Stapel von 36 Karten (Schweizer Jasskarten: 4 Ass, 4 Könige, 4 Damen, 4 Buben, 4 Zehner, 4 Neuner, 4 Achter, 4 Siebner und 4 Sechser). Diese 9 Karten nennen wir ein Blatt, wobei die Reihenfolge, in der die Karten gezogen wurden, keine Rolle spielt.
- a) Wieviele Blätter mit genau 4 Buben sind möglich? [201376]
- b) Wieviele Blätter mit genau 2 Buben und 2 Damen sind möglich? [3538080]
36. Beim Spiel MasterMind geht es darum, 4 Stifte (10 verschiedene Farben) in 4 Löcher zu stecken (z.B. grüner Stift ins 1.Loch, gelber Stift ins 2.Loch, grüner Stift ins 3.Loch, blauer Stift ins 4.Loch). Dabei wird die Reihenfolge berücksichtigt (d.h. „erstes Loch Gelb und zweites Loch Grün“ wird unterschieden von „erstes Loch Grün und zweites Loch Gelb“)
- a) Auf wieviele Arten ist das möglich (Eine Farbe darf beliebig oft vorkommen) ? [10000]
- b) Auf wieviele Arten ist das möglich, wenn eine Farbe höchstens 1 Mal vorkommen darf? [5040]
- c) Wieviele Konstellationen sind möglich, wenn genau eine Farbe genau 2 Mal vorkommen muss? [4320]
37. Ein Pokerspiel besteht aus 52 Karten. Es werden nun fünf Karten gezogen. Wieviele Blätter mit
- a) einem Doppelzwilling (z.B. Herz-Vier, Kreuz-Vier, Herz-Bube, Pik-Bube, Pik-Dame) sind möglich ? [123552]
- b) Full House (Drilling und Zwillling) sind möglich ? [3744]
- c) genau einem Zwillling sind möglich ? [1098240]

38. Acht Schüler wollen in einer Halle Fussball spielen. Wie viele Einteilungen in zwei Vierer-Mannschaften sind denkbar ? [35]
39. Wieviele fünfstellige Zahlen gibt es, wenn
- a) keine Eins vorkommen darf ?
 - b) genau eine Eins vorkommen muss ?
 - c) genau zwei Einsen vorkommen müssen ?
 - d) genau drei Einsen vorkommen müssen ?
 - e) genau vier Einsen vorkommen müssen ?
 - f) genau fünf Einsen vorkommen müssen ?
 - g) es keine Einschränkung gibt ? Kannst Du einen Zusammenhang zwischen den Aufgaben a)-e) und f) herstellen ?

7 Probleme, bei denen die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird- zweiter Aufgabentyp-mit Wiederholung