3.2 Exponentialfunktion und Wachstum/Zerfall

Inhaltsverzeichnis

1 Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist folgendermassen definiert:

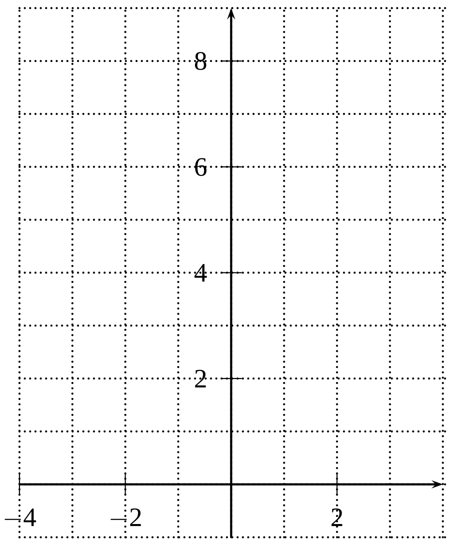
Definition 1 *Eine Funktion heisst* ***Exponentialfunktion****, wenn ihre Vorschrift die folgende Form hat:*

Bem 1
Der Name ist hier selbsterklärend. Die Variable (Argument) x steht im Exponent, daher der Name Exponentialfunktion.

Wie sieht der Graph einer Exponentialfunktion aus ? Setzen wir mal $a = 2$. Wir erhalten die folgende Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	...
2^x						

Wir zeichnen die Punkte ins Koordinatensystem ein:



Übungen

1. a) Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen ins obenstehende Koordinatensystem.
   i) $f(x) = 3^x$ ii) $f(x) = 0.5^x$ iii) $f(x) = 0.8^x$

   b) Streiche bei den folgenden Sätzen das falsche Wort durch:
   i) Für $a > 1$ gilt: Je grösser a, umso steiler/flacher ist der Graph auf der rechten Seite der x-Achse.
   ii) Für $0 < a < 1$ gilt: Je grösser a, umso steiler/flacher ist der Graph auf der linken Seite der x-Achse.

2. Stelle rechnerisch fest, ob der angegebene Punkt oberhalb, unterhalb oder auf dem Graphen mit der Vorschrift $f(x) = 2^x$ liegt.

   a) $P_1 = (4|15)$ [unterhalb] b) $P_2 = (-2|0.24)$ [unterhalb] c) $P_3 = (3|8)$ [auf]

3. Bestimme, falls möglich, die Basis der Funktion f mit der Funktionsvorschrift $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, wenn der Punkt P auf dem Graphen der Funktion liegt.

   a) $P_1 = (1|3)$ [$a = 3$] b) $P_2 = (2|3)$ [$a = \sqrt{3}$] c) $P_3 = (2|4)$ [$a = 2$]

4. Welche der folgenden Wertetabellen stammt von einer Exponentialfunktion ?

   a)

-1	0	1	2	3
0.25	1	4	16	64

   b)

-1	0	1	2	3
-1	1	3	5	7

5. Die Spannung U [Volt] einer 12-Volt-Batterie während des Einschaltvorgangs im Zeitpunkt t [Sekunden] lässt sich mit folgender Formel beschreiben:

$$U(t) = 12 \cdot (1 - e^{-kt})$$

   Man misst $U(0.1) = 10.22$.

   a) Berechne k. [$k \approx 19.083$]

   b) Welches ist die Spannung im Zeitpunkt $t = 0.2$ [Sekunden] ? [≈ 11.74 Volt]

   c) In welchem Zeitpunkt beträgt die Spannung 6 Volt ? [≈ 0.036 Sekunden]

6. (Zusatz) Die Temperatur T [°C] einer Kaffeetasse zum Zeitpunkt t [min] lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$T(t) = a \cdot e^{-kt} + b$$

   Man misst: $T(0.5) = 86, T(4) = 68.5$ und $T(7.5) = 55.5$.

   a) Berechne die Parameter a, b und k. [$a \approx 71.008, b \approx 17.944, k \approx 0.08493$]

   b) Wann muss man zur Tasse greifen, wenn der Kaffee genau 60°C warm sein soll ? [6.167 min]

2 Exponentielles Wachtum und exponentieller Zerfall

In diesem Abschnitt geht es um exponentielle Wachstumsprozesse wie z.B. Kapitalvermehrung, Vermehrung eines Algen- oder Waldbestandes, radioaktiver Zerfall, usw. Solche Prozesse können mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden. Zwei Beispiele:

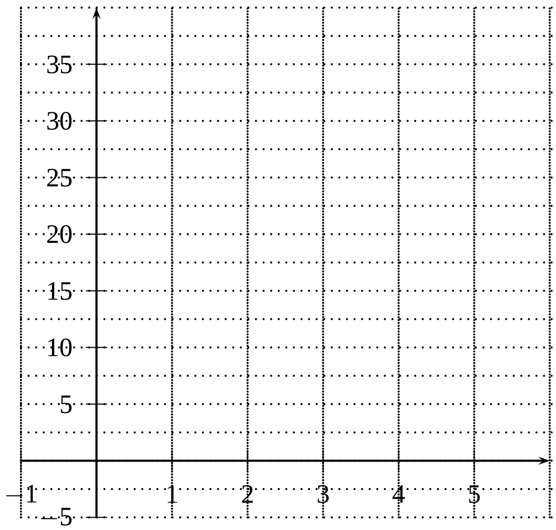
Beispiel 1

Ein See ist zu 1.5% mit Algen bedeckt. Diese vermehren sich so, dass sie jeden neuen Tag eine doppelt so grosse Fläche bedecken. Wie kann dieses Wachstum mit einer Formel beschrieben werden ?

Wir füllen zuerst folgende Tabelle aus:

Tage	0	1	2	3	4	...
Fläche in %	1.5					...

Wir zeichnen die Punkte ins Koordinatensystem ein:

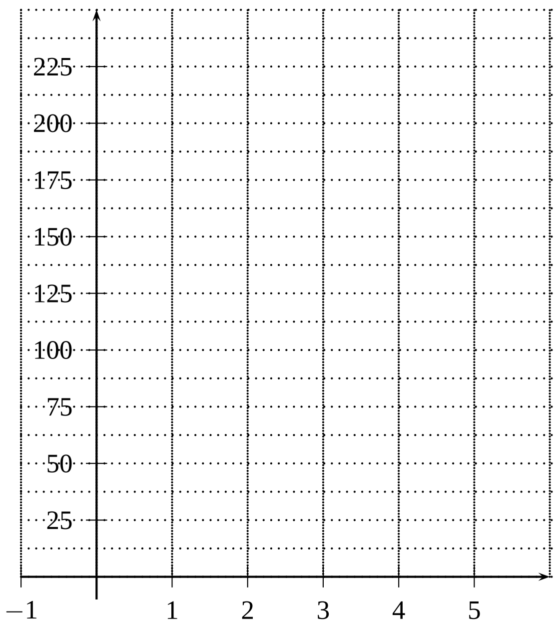


Beispiel 2

Ein radioaktiver Stoff bestehe aus 243 Mio Atomen. Jede Stunde zerfällt ein Drittel des Bestandes. Mit welcher Vorschrift lässt sich dieses Wachstum beschreiben ?

Stunden	0	1	2	3	4	...
Atome in Mio	243					...

Wir zeichnen die Punkte ins Koordinatensystem ein:



Wir halten fest:

exponentielle Wachstumsvorgänge lassen sich mit einer Gleichung der folgenden Form beschreiben:

$$B(t) = B(0) \cdot a^t$$

$B(0)$ ist dabei der Bestand zum Zeitpunkt $t = 0$ (Anfangsbestand), a ist der Wachstumsfaktor. Wenn

- $0 < a < 1$: Exponentieller Zerfall (der Bestand nimmt mit der Zeit ab)
- $0 < a < 1$: Exponentielles Wachstum (der Bestand nimmt mit der Zeit zu)

Beispiel 3

Von 5 kg (Zeitpunkt $t = 0$) eines radioaktiven Isotops (exponentieller Zerfall) sind nach 5 Stunden noch 2 kg vorhanden. Wie lautet das Zerfallsgesetz ? $[B(t) = 5 \cdot 0.833^t]$

Übungen

7. Eine Bakterienpopulation umfasst $4 \cdot 10^6$ Exemplare. Nach 2 Stunden hat sich die Zeit der Exemplare vervierfacht. Wir nehmen an, dass die Zahl der Exemplare exponentiell wächst. Wie viele Exemplare sind nach 10 Stunden vorhanden ? $[\approx 8.19 \cdot 10^9$ Bakterien$]$
8. 2% eines Sees ist mit Algen bedeckt. Die Algenfläche verdoppelt sich jeweils innert zwei Tagen.
   a) Warum handelt es sich hier um exponentielles Wachstum ?
   b) Mit welcher Funktionsvorschrift (Formel) kann dieses Wachstum beschrieben werden ? $[B(t) \approx 2\% \cdot 1.414^t]$
   c) Nach wievielen Tagen ist der See ganz mit Algen bedeckt ? $[\approx 11.29$ Tage$]$
   d) Nach wievielen Tagen ist der See ganz mit Algen bedeckt, wenn sich die Algenfläche jeweils innert 5 Tagen verdoppelt ? $[\approx 28.22$ Tage$]$
9. Eine Bakterienpopulation wächst exponentionell. Um 14 Uhr sind 2300 Bakterien vorhanden, um 16 Uhr sind es 36000 Bakterien.
   a) Wieviele Bakterien hat es um 16.30 Uhr ? $[\approx 71605$ Bakterien$]$
   b) Um welche Uhrzeit sind 100000 Bakterien vorhanden ? $[\approx 16.45$ Uhr$]$
10. Ein Auto verliert jedes Jahr an Wert. Im 1.Jahr ist die Wertminderung am grössten, danach wird sie von Jahr zu Jahr geringer. Der Autohandel geht von 19% Wertminderung pro Jahr aus.
    a) Stelle die Wertminderung für ein Auto, dessen Neupreis 25000 Fr. ist, graphisch dar.
    b) Berechne die Halbwertszeit (die Zeit, nach der das Auto nur noch halb soviel Wert hat). $[t \approx 3.29$ Jahre$]$
    c) Berechne die Halbwertszeit, wenn das Auto einen Neupreis von 40000 Fr. gehabt hätte. $[t \approx 3.29$ Jahre$]$
    d) Kannst Du eine Formel angeben, mit der sich die Halbwertszeit direkt berechnen lässt ?
11. Ein Kapital von 1000 Fr liegt auf einer Bank und wird mit 5% verzinst.

a) Wie gross ist das Kapital nach 5 vollen Jahren bei einem Zins von 5% ? [1276.28 Fr]

b) Wie viele Jahre würde es dauern bis das Kapital auf 10000Fr. angewachsen ist ? [47.19 J.]

c) Nach welcher Zeit hat sich das Kapital verdoppelt ? [14.21 J.]

d) Nach welcher hätte sich ein Kapital von 3000 Fr verdoppelt ? [14.21 J.]

e) Kannst Du eine Formel angeben, mit der sich die Verdoppelungszeit direkt berechnen lässt ?

12. Die Einwohnerzahl von Afrika nahm von 1980 bis 1985 jährlich um 3% zu. In der Mitte des Jahres 1985 betrug sie 555 Millionen.

a) Welches war die Einwohnerzahl Mitte 1980 (auf Millionen genau) ? [479 Mio]

b) In welchem Jahr wird die Einwohnerzahl bei unveränderter Wachstumsrate die Milliardengrenze überschreiten ? [2005]

c) Welches ist die Verdoppelungszeit bei unveränderter Wachtumsrate ? [23.45 Jahre]

13. Ein lebender Organismus enthält Kohlenstoff, dabei ist ein Teil von 3% nicht stabil. Sobald der Organismus stirbt, nimmt der Anteil der nichtstabilen Elemente mit einer Halbwertszeit von 5736 Jahren exponentionell ab (Es kommen keine neuen Elemente dazu). Heute misst man bei einer altägyptischen Königsmumie einen Anteil von 1.75% an nicht stabilem Kohlenstoff. Wie alt ist die Mumie ? [4460 Jahre]

14. Auf Filmverpackungen wird die Lichtempfindlichkeit des photographischen Materials meist mit DIN (deutsche Norm) und ASA (amerikanische Norm) angegeben. Dabei entsprechen sich

DIN	15	18	21	24	27
ASA	25	50	100	200	400

a) Finde eine Funktionsgleichung, die den Zusammenhang von DIN und ASA beschreibt.

b) Rechne die Filmempfindlichkeit 28DIN in ASA um.

c) Welcher Filmempfindlichkeit entspricht 500ASA in der DIN-Norm ?