2.2 Funktionen 2.Grades

(Thema aus dem Bereich Analysis)

Inhaltsverzeichnis

1 Definition einer Funktion 2.Grades.

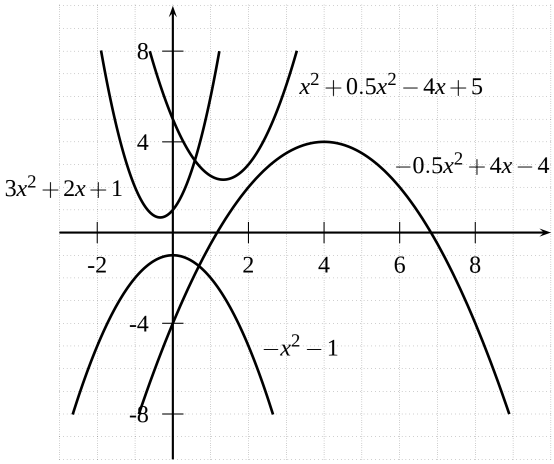
Bei einer Funktion 2.Grades soll sicher ein x^2 vorkommem. Ein x muss nicht zwangsläufig vorkommen. Sowohl die Zahlen vor dem x^2 und x als auch die blosse Zahl können beliebige Werte annehmen, die Zahl vor dem x^2 soll einfach nicht 0 sein, weil sonst der Quadratterm wegfällt. Wir legen also fest:

Definition 1 *Eine Funktion heisst Funktion 2.Grades, wenn ihre Vorschrift durch Termumformungen auf folgende Form gebracht werden kann:*

Zwei Bemerkungen:

- Die Vorschrift ist in der **Normalform**.
- Eine Funktion 2.Grades wird oft auch **quadratische Funktion** genannt.
- a, b und c nennen wir **Parameter**.

Die Funktionsgraphen sehen folgendermassen aus:



Erste Beobachtungen

Übungen

1. Entscheide, ob eine Funktion 2.Grades vorliegt. Falls ja, dann bestimme die Parameter a, b und c.

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -0.5x^2 + 4x - 4$
   b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 4x - 4$
   c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (x-1)^2 + 4x - 4 - x^2$
   d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x^2 - 1$

2. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen und bestimme danach durch Ablesen den Scheitelpunkt und sämtliche Nullstellen.

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - 4$ $[S(0|-4), N_1 = (-2|0), N_2 = (2|0)]$
   b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 + 2x - 3$ $[S(-1|-4), N_1 = (-3|0), N_2 = (1|0)]$
   c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = -x^2 + 3x - 2$ $[S(1.5|0.25), N_1 = (1|0), N_2 = (2|0)]$

3. Berechne (d.h. ohne zeichnerische Hilfe) bei der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 15$ die Nullstellen, den Schnittpunkt mit der y-Achse und den Scheitelpunkt. $[N_1 = (-3|0), N_2 = (5|0), S_y(0, -15), S = (1|-16)]$

4. Entscheide, ob eine Funktion 2.Grades vorliegt. Falls ja, dann bestimme die Parameter a, b und c.

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 3x^3 + 2x$
   b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x + 4$
   c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (x+2)^2 + 2x - 5$
   d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x + 1$

5. Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + bx + c$ geht durch die Punkte $P(3|5)$ und $Q = (7|10)$. Berechne die Parameter b und c. $[b = -8.75, c = 22.25)]$

6. Ein Kugelstösser stösst eine Kugel. Die Flugbahn der Kugel lässt sich mit dem folgenden Gesetz beschreiben:

$$H(x) = -\frac{1}{35}x^2 + 0.5x + 1.5,\ x\text{:Stelle am Boden, } H(x)\text{: Höhe der Kugel.}$$

   a) An welcher Stelle erreichte die Kugel die maximale Höhe und welche Höhe erreichte die Kugel an dieser Stelle ? $[8.75\,\text{m}, 3.69\,\text{m}]$
   b) Wie weit wurde die Kugel gestossen ? $[20.11\,\text{m}]$

7. Gegeben ist die Funktion 2.Grades $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Für welche Werte von x gilt: $f(x) \geq 1$? [**L**=[-0.73,2.73]]

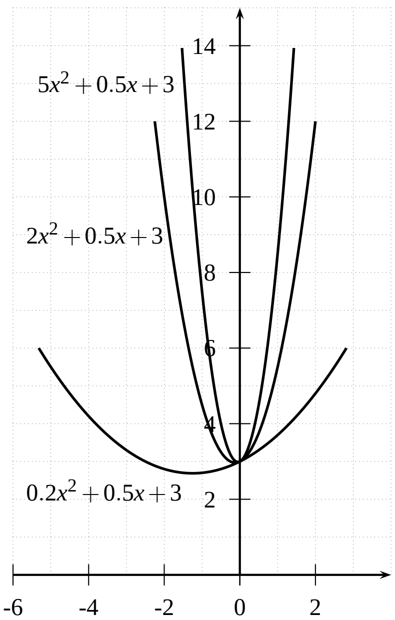
8. Wieviele Punkte brauchen wir, bis eine Parabel vollständig bestimmt ist ?

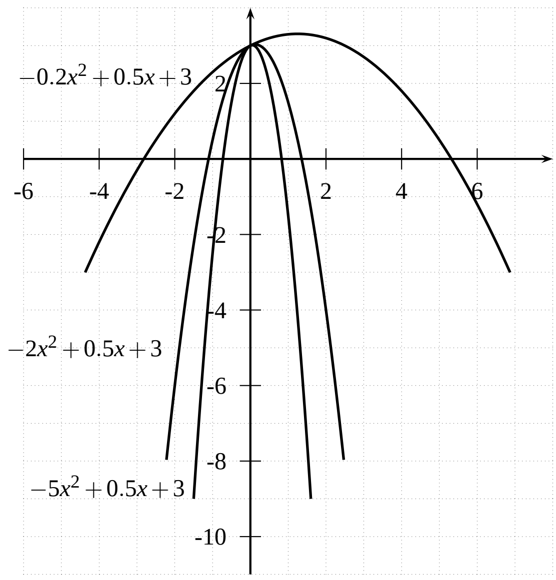
2 Der Parameter a

Frage: Welchen Einfluss hat der Parameter a auf den Grafen ?

Weg: Wir nehmen die Vorschrift einer Funktion 2.Grades und setzen bei ihr für den Parameter a verschiedene Werte ein.

Dieses Vorgehen machen wir unbewusst auch im Alltag. Wenn wir z.B. wissen wollen, welche Wirkung z.B. Salz auf eine Sauce hat, dann ändern wir nur die Menge des Salzes. Wenn ich drei Zutaten gleichzeitig ändere, weiss ich nicht, welche Zutat den Geschmack wie verändert hat.





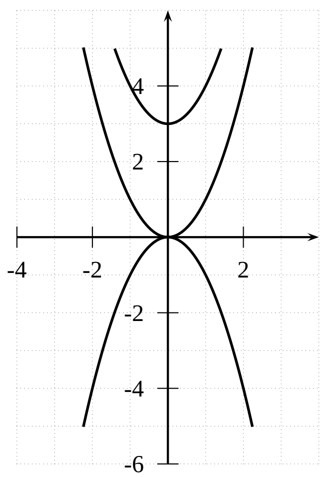
Antwort:

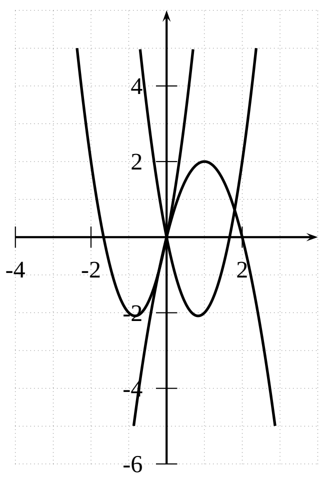
Übung

9. Ordne die Funktionsgraphen den entsprechenden Funktionen 2.Grades zu und begründe Deine Zuordnung ! Zur Auswahl stehen die folgenden Funktionsvorschriften:

a) $f(x) = x^2 + 3$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = -x^2$

d) $f(x) = 3x^2 - 5x$ e) $f(x) = 3x^2 + 5x$ f) $f(x) = -2x^2 + 4x$



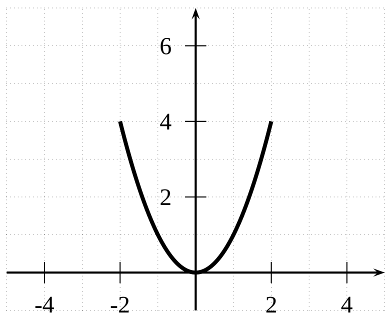


3 Die Verschiebung des Graphen

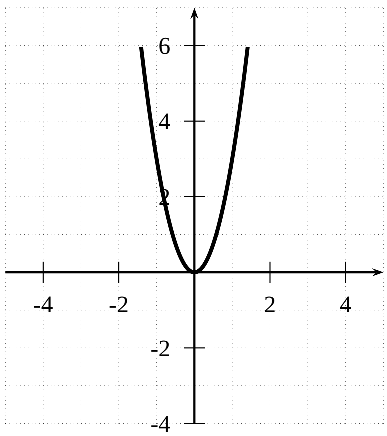
3.1 Die Verschiebung des Graphen in y-Richtung

Einen Graphen können wir nach oben oder nach unten verschieben, indem wir einfach eine bestimmte Zahl dazu- oder abzählen. Wenn eine Funktionsvorschrift gegeben ist und ich zu ihr 5 dazuzähle, dann wird der Graph der neuen Vorschrift an jeder Stelle um 5 höher sein als bei der alten Vorschrift. Zwei Beispiele:

$f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + 2$



$g_1(x) = 3x^2, g_2(x) = 3x^2 - 3$

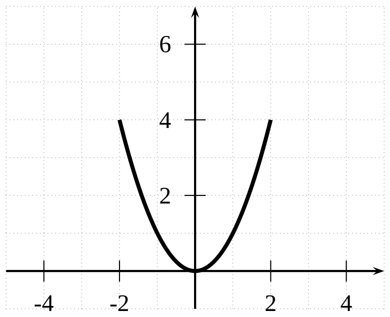


Merke:

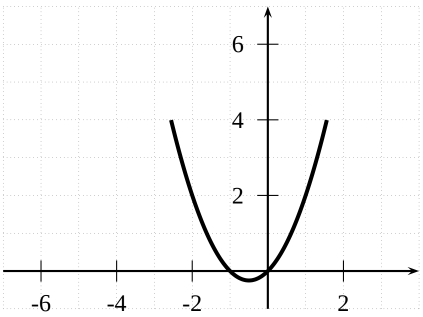
3.2 Die Verschiebung des Graphen in x-Richtung

Wir haben gesehen, wie wir einen Graphen nach oben oder nach unten verschieben können, aber nicht wie wir ihn nach links oder rechts verschieben können. Wir können uns überlegen: Ich nehme für x eine beliebige Zahl, z.B. 5. Wenn ich den Graphen um 3 Einheiten nach rechts verschieben will, dann ziehe ich einfach gleich wieder 3 ab. Ich erhalte bei 5 dann den Funktionswert, den ich eigentlich bei 2 erhalten hätte.

$f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x-2)^2$



$g_1(x) = x^2 + x, g_2(x) = (x+3)^2 + (x+3)$

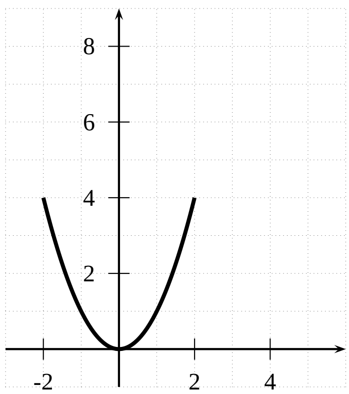


Merke:

3.3 Die Verschiebung eines Graphen in x- und y-Richtung

Bisher wurde der Graph entweder in die horizontale oder in die vertikale Richtung verschoben. Es ist auch eine Kombination der beiden Richtungen möglich. Ich nehme zum Beispiel die Funktion x^2. Ich kann den Graphen zuerst um 2.5 Einheiten nach rechts verschieben: $(x-2.5)^2$. Dann kann ich den Graphen noch um 4.5 Einheiten nach oben verschieben: $(x-2.5)^2+4.5$. Der Graph wurde insgesamt um 2.5 Einheiten nach rechts und um 4.5 Einheiten nach oben verschoben. Dies sehen wir deutlich auf der unteren Grafik.

$$f_1(x)=x^2,\, f_2(x)=(x-2.5)^2,\, f_3(x)=(x-2.5)^2+4.5$$



Wir können nun den Scheitelpunkt des Graphen bestimmen. Bei x^2 war der Scheitelpunkt in $(0|0)$. Nach der Rechtsverschiebung war er in $(2.5|0)$. Danach wurde der Graph um 4.5 Einheiten nach oben verschoben, der Scheitelpunkt war dann in $(2.5|4.5)$.

Wir definieren eine Funktion 2.Grades noch auf eine 2.Art:

Definition 2 *Eine Funktion heisst Funktion 2.Grades, wenn sie durch Termumformungen auf folgende Form (Scheitelpunktsform) gebracht werden kann:*

Übungen

10. Gegeben ist die Funktion $f(x)=2x^2$. Ändere die Vorschrift so ab, dass der Graph um

a) 3 Einheiten nach oben verschoben wird. b) 3 Einheiten nach links verschoben wird.
c) 3 Einheiten nach rechts verschoben wird. d) 3 Einheiten nach unten verschoben wird.
e) 2 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach oben verschoben wird.
f) 3 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach unten verschoben wird.

11. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Ändere die Vorschrift so ab, dass der Graph um

a) 3 Einheiten nach oben verschoben wird. b) 3 Einheiten nach links verschoben wird.
c) 3 Einheiten nach rechts verschoben wird. d) 3 Einheiten nach unten verschoben wird.
e) 2 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach oben verschoben wird.
f) 3 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach unten verschoben wird.

12. Bestimme den Scheitelpunkt der folgenden quadratischen Funktionen.

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (x+2)^2 - 5$
b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (x-3)^2 + 1$

13. Gib eine quadratische Funktion an, deren Scheitelpunkt in

a) $(3|5)$ liegt. b) $(-2|-4)$ liegt.

14. Gib eine Funktionsvorschrift an, deren Parabel

a) die y-Achse an der Stelle 4 schneidet. b) nach oben geöffnet ist.
c) genau 1 Nullstelle hat. d) 2 Nullstellen hat.
e) keine Nullstellen hat. f) den Scheitelpunkt $S = (3|4)$ hat.

15. Gegeben ist der Graph der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 3x - 4$. Der Graph wird nun gespiegelt. Wie lautet die neue Vorschrift, wenn wir den Graphen

a) an der x-Achse spiegeln ? $[-(x+1.5)^2 + 6.25]$
b) an der y-Achse spiegeln ? $[(x-1.5)^2 - 6.25]$
c) am Scheitelpunkt spiegeln ? $[-(x+1.5)^2 - 6.25]$

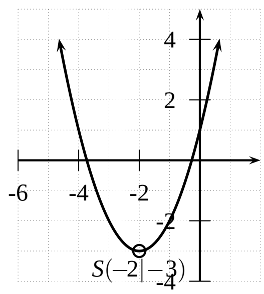
16. Die Parabel $y = -x^2 + 4x + 5$ wird zuerst um 180° gedreht und danach so verschoben, dass der Scheitelpunkt in $S = (6|6)$ liegt. Wie lautet die Gleichung der neuen Parabel ?

17. Bestimme die Gleichung $y = a(x-u)^2 + v$ einer Parabel so, dass sie den Scheitelpunkt $S = (2|4)$ hat und durch den Punkt $Q(3|-7)$ geht. $[y = -11(x-2)^2 + 4]$

18. Gib eine Funktion 2.Grades an, deren Funktionsgraph nach unten geöffnet ist und deren Scheitelpunkt in $(2|-4)$ liegt.

4 Die Umkehrfunktion

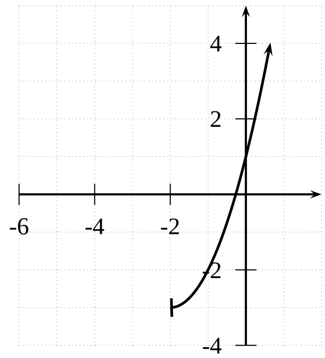
Gegeben ist die Funktion 2.Grades $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 4x + 1$. Den Graphen sehen wir auf der rechten Abbildung. Wir stellen uns nun die Frage, ob diese Funktion umkehrbar ist:



- 1.Kriterium: Werden die Elemente aus der Bildmenge nur einmal getroffen ? $\rightarrow$ nein. z.B. ist $f(-4) = 1$, aber auch $f(0) = 1$. Die 1 (und noch viele andere) wird zweimal getroffen.
- 2.Kriterium: Werden alle Elemente aus der Bildmenge getroffen ? $\rightarrow$ nein. z.B. wird die -4 nie getroffen.

Zuerst wollen wir die Funktion so verändern, dass das 1.Kriterium erfüllt ist:

Damit keine Elemente zweimal getroffen werden, nehmen wir den linken Parabelast weg. Dies geschieht indem wir die Definitionsmenge einschränken. Wir setzen für x nur noch die Werte rechts vom Scheitelpunkt ein (dazu den x-Wert des Scheitelpunktes). Wir erhalten:



Auf der nebenstehenden Abbildung können wir sehen, dass der linke Ast verschwunden ist.

Nun wollen wir auch noch das 2.Kriterium erfüllen. Wir müssen alle Elemente entfernen, die nicht getroffen werden. Das sind aber genau diejenigen, die unterhalb des Scheitelpunktes liegen. Übrig bleiben die folgenden Elemente: Nach der Änderung von Definitions- und Bildmenge ist die Funktion nun umkehrbar.

Wir müssen jetzt nur noch die Funktionsvorschrift der Umkehrfunktion berechnen:

- $f(x) = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 1$
- $-x^2 - 4x - 1 + y = 0 \Rightarrow x_1 = -(\sqrt{y+3} + 2)$ und $x_2 = \sqrt{y+3} - 2$
- $\overline{f_1}(y) = -\sqrt{y+3} - 2$ und $\overline{f_2}(y) = \sqrt{y+3} - 2$

Wir haben zwei Vorschriften, und es stellt sich nun die Frage, welche wir nehmen müssen.

- Für die Funktion f gilt: $f(0) = 1$. Die Umkehrfunktion dreht das ganze um, d.h. wenn wir 1 einsetzen, müssen wir 0 erhalten.
- $\overline{f_1}(1) = -\sqrt{1+3} - 2 = -2 - 2 = -4$
- $\overline{f_2}(1) = \sqrt{1+3} - 2 = 0$

Somit ist also die zweite Vorschrift die Umkehrfunktion für den **rechten** Parabelast, für den wir uns entschieden haben. Wir können die Umkehrfunktion nun notieren:

Übungen

19. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.

a) Ändere Definitions- und Bildmenge so ab, dass die Funktion umkehrbar wird. $[\mathbf{D} = [0,\infty), \mathbf{B} = [0,\infty)]$

b) Bestimme die Vorschrift der Umkehrfunktion. $[\sqrt{y}]$

c) Gib die Umkehrfunktion vollständig an (mit Definitions- und Bildmenge). $[\overline{f} : [0,\infty) \to [0,\infty), \overline{f}(y) = \sqrt{y}]$

20. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - 4$.

a) Ändere Definitions- und Bildmenge so ab, dass die Funktion umkehrbar wird. $[\mathbf{D} = [0,\infty), \mathbf{B} = [-4,\infty)]$

b) Bestimme die Vorschrift der Umkehrfunktion. $[\sqrt{y+4}]$

c) Gib die Umkehrfunktion vollständig an (mit Definitions- und Bildmenge). $[\overline{f} : [-4,\infty) \to [0,\infty), \overline{f}(y) = \sqrt{y+4}]$

21. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 + 3x - 4$.

a) Ändere Definitions- und Bildmenge so ab, dass die Funktion umkehrbar wird.
$[\mathbf{D} = [-0.75,\infty), \mathbf{B} = [-6.125,\infty)]$

b) Bestimme die Vorschrift der Umkehrfunktion. $[\frac{+\sqrt{8y+49}-3}{4}]$

c) Gib die Umkehrfunktion vollständig an (mit Definitions- und Bildmenge). $[\overline{f} : [-0.75,\infty), [-6.125,\infty), \overline{f}(y) = \frac{+\sqrt{8y+49}-3}{4}]$

5 Extremwertaufgaben

Eine Anwendung für Funktionen 2.Grades sind die Extremwertaufgaben. Es wird dabei ein maximaler oder minimaler Wert gesucht.

Ein Beispiel:

Übungen

22. Die Summe zweier positiver Zahlen sei 9. Bestimme darunter diejenigen Zahlen, deren Produkt am grössten ist. [4.5 und 4.5]

23. Die Summe aller Kanten einer quadratischen Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) misst 24 cm. Berechne die Kanten so, dass die Oberfläche maximal wird. $[a = b = c = 2\,\text{cm}]$

24. Ein Zaun von 50 m Länge soll einen rechteckigen Platz, der an eine Mauer grenzt, auf drei Seiten begrenzen. Welchen Flächeninhalt kann der Platz maximal haben ? $[312.5m^2]$

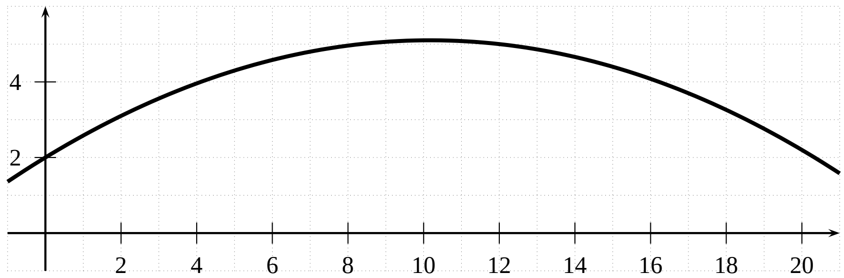
25. Eine ebene 400 m-Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen begrenzt. Wie gross muss der Radius r sein und wie lang ist ein gerades Stück zwischen den Kurven, wenn

    a) das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben soll ? $[100\,\text{m}, 31.83\,\text{m}]$

    b) das ganze Oval maximalen Flächeninhalt haben soll ? $[0\,\text{m}, 63.66\,\text{m}]$

6 gemischte Übungen

26. Ein Kugelstösser stösst eine Kugel. Auf dem untenstehenden Graphen sehen wir die Flugbahn der Kurve (x-Achse: Weite am Boden in m, y-Achse: Höhe in m). Folgende Punkte des Graphen sind dabei bekannt: $P_1(0|2)$, $P_2(7|4.8)$ und $P_3(10|5.1)$.



    a) Beschreibe den Verlauf der Kugel mit einer Funktion. $[f(x) = -0.03x^2 + 0.61x + 2]$

    b) Berechne, wie weit die Kugel gestossen wurde. $[23.21\,\text{m}]$

    c) Welches war die grösste Höhe (exakt), die von der Kugel erreicht wurde ? $[5.10\,\text{m}]$

27. Bei den folgenden Beispielen wurde die Funktionsvorschrift geändert. Bei welcher Änderung wird dabei der Funktionsgraph um 5 Einheiten nach rechts verschoben ?

    a) $3x$ wird zu $3x-5$
    b) $3x$ wird zu $3(x+5)$
    c) $3x$ wird zu $3(x-5)$
    d) $3x$ wird zu $3x+5$

28. Die Parabel $y = 3(x-2)^2 + 9$ wird

    a) an der Geraden $x = 5$ gespiegelt.
    b) an der Geraden $y = 5$ gespiegelt.
    c) am Punkt $(5|5)$ gespiegelt.

    Gib jeweils die Gleichung der neuen Parabel in der Normalform an.

29. Bei den folgenden Beispielen wurde die Funktionsvorschrift geändert. Bei welcher Änderung wird dabei der Funktionsgraph um 5 Einheiten nach links verschoben ?

    a) $2x^2+3x$ wird zu $2x^2+3x-5$
    b) $3x^2$ wird zu $3(x+5)^2-6$
    c) $2x^2+3x$ wird zu $2(x+5)^2+3(x+5)+6$
    d) $3x$ wird zu $3x+5$

30. Eine Funktion 2-ten Grades hat die Nullstellen bei $x = 3$ und $x = -5$. Dazu geht der Graph durch den Punkt $(2|-7)$. Berechne die Parameter a, b und c. $[a = 1, b = 2 \text{ und } c = -15]$

31. Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von Fr.12 durchschnittlich 240 BesucherInnen. Würde man den Eintrittspreis um Fr. 1.-,2.-,3.-,usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10,20,30,usw. Personen zurück. Bei welchem Eintrittspreis sind die Einnahmen am grössten ?

32. (Zusatz) Mit einem Faden der Länge u soll der Umfang eines Kreissektors gebildet werden. Für welchen Radius wird die Sektorfläche maximal und wie gross ist dann der Zentriwinkel ?

33. (Zusatz) Finde den Scheitelpunkt der Funktion $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ mit Hilfe von quadratischer Ergänzung.

34. (Zusatz) Finde den Scheitelpunkt der allgemeinen Funktion 2.Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$.