Lösungen Stereometrie

Der Würfel

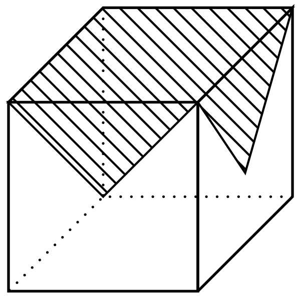
1. Berechne bei einem gleichseitigen Dreieck die Höhe h und den Flächeninhalt A, wenn
   a) die Seitenlänge a des Dreiecks 10 cm beträgt.
      - $\underline{\underline{h}} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx \underline{\underline{8.66\,\text{cm}}}$
      - $\underline{\underline{A}} \approx \frac{10 \cdot 8.66}{2} \approx \underline{\underline{43.3\,\text{cm}^2}}$

   b) die Seitenlänge a beträgt.
2. Berechne bei den folgenden rechtwinkligen Dreiecken jeweils die übrigen Seiten und Winkel:
   a) $a = 3\,\text{cm}$ und $\beta = 50°$
      - $\alpha = 40°$
      - $\cos(50°) = \frac{3}{c} \Rightarrow \underline{\underline{c \approx 4.67\,\text{cm}}}$
      - $\underline{\underline{b}} \approx \sqrt{4.67^2 - 3^2} \approx \underline{\underline{3.58\,\text{cm}}}$

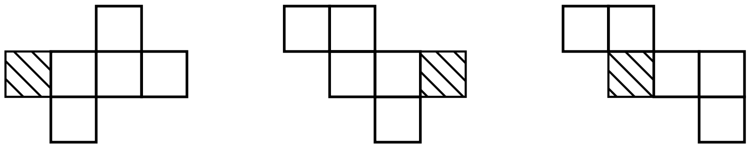
   b) $b = 5\,\text{cm}$ und $\beta = 40°$
      - $\alpha = 40°$
      - $\sin(40°) = \frac{5}{c} \Rightarrow c \approx 7.78\,\text{cm}$
      - $\underline{\underline{a}} \approx \sqrt{7.78^2 - 5^2} \approx \underline{\underline{5.96\,\text{cm}}}$
3. Welche Dichte hat ein Körper mit einem Volumen von $3\,\text{m}^3$ und einer Masse von 300 kg ?
   - $\underline{\underline{\rho}} = \frac{m}{V} = \frac{300\,\text{kg}}{3\,\text{m}^3} = \underline{\underline{100\,\text{kg}/m^3}}$
4. Welche Masse hat ein Körper mit einem Volumen von $10\,\text{dm}^3$ und einer Dichte von $40\,\text{kg}/\text{dm}^3$?
   - $\underline{\underline{\rho}} = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V$
   - $\underline{\underline{m}} = 40\,\text{kg}/\text{dm}^3 \cdot 10\,\text{dm}^3 = \underline{\underline{40\,\text{kg}}}$
5. Berechne bei einem Würfel mit der Kantenlänge $k = 5\,\text{cm}$
   a) die Flächendiagonale d. $\rightarrow \underline{\underline{d}} = \sqrt{5^2 + 5^2} \approx \underline{\underline{7.07\,\text{cm}}}$
   b) die Raumdiagonale D. $\rightarrow \underline{\underline{D}} \approx \sqrt{7.07^2 + 5^2} \approx \underline{\underline{8.66\,\text{cm}}}$
6. Berechne bei einem Würfel mit der Kantenlänge k
   a) die Flächendiagonale in Abhängigkeit von k. $\rightarrow \underline{\underline{d}} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}k}}$
   b) die Raumdiagonale in Abhängigkeit von k. $\rightarrow \underline{\underline{D}} = \sqrt{(\sqrt{2}k)^2 + k^2} = \sqrt{3k^2} = \underline{\underline{\sqrt{3}k}}$

7. Wir betrachten einen würfelförmigen Tisch (Kantenlänge k), auf welchem ein quadratisches Tischtuch liegt, dessen Ecken genau in die Mittelpunkte der 4 Seitenflächen fallen. Wie gross ist der Flächeninhalt des Tischtuches ?

   - Eine Tischtuchecke deckt einen Viertel der Seitenfläche ab.
   - Alle 4 Ecken ergeben gerade eine Seitenfläche $\rightarrow \underline{\underline{A = 2k^2}}$



8. Nun wird der Würfel aus der Aufgabe 5 samt dem Tischtuch aufgeschnitten und in ein Würfelnetz zerlegt. Die ursprüngliche Deckfläche mit dem Tischtuch ist nach wie vor grau eingefärbt. Wo aber befinden sich nun die vier dreieckigen Tischtuch-Eckteile ? Zeichne diese in den nachstehenden Würfelnetzen an der richtigen Stelle und in der richtigen Lage ein.



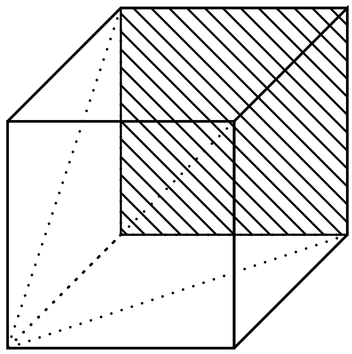
9. Einen Würfel der Kantenlänge $k = 8\,\text{cm}$ kann man in schiefe Pyramiden zerteilen. Eine solche schiefe Pyramide ist im nebenstehenden Würfel eingezeichnet.

   a) Berechne die Summe K der acht Kanten dieser Pyramide (Zusatz: bei allgemeiner Kantenlänge k).

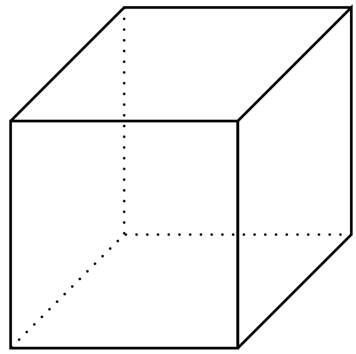
   - $\underline{\underline{K}} = 5 \cdot 8\,\text{cm} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 8\,\text{cm} + \sqrt{3} \cdot 8\,\text{cm} = \underline{\underline{76.48\,\text{cm}}}$
   - Zusatz: $\underline{\underline{K = 5k + 2\sqrt{2}k + \sqrt{3}k}}$

   b) Wie gross ist die Oberfläche A einer solchen schiefen Pyramide in unserem Würfel (Zusatz: bei allgemeiner Kantenlänge k) ?

   - $\underline{\underline{A}} = 8^2\,\text{cm}^2 + 2 \cdot \frac{8^2\,\text{cm}^2}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm}}{2} = \underline{\underline{218.51\,\text{cm}^2}}$



10. Stelle Dir in unserem Würfel eine gerade Pyramide vor, und zwar so, dass eine der Seitenflächen des Würfels ihre Grundfläche bildet und dass ihre Spitze im Würfelzentrum liegt. Zeichne eine solche Pyramide in den untenstehenden Würfel möglichst anschaulich und farbig hinein. Beachte dabei, dass man die Lage des Würfelzentrums konstruieren kann, indem man die Raumdiagonalen im Würfel zeichnet. Welches Volumen V besitzt eine solche Pyramide in einem Würfel der Kantenlänge k ?



- 6 Pyramiden ergeben genau den Würfel. Deshalb $\underline{\underline{V = \frac{k^3}{6}}}$

11. Welche Masse hat ein Bleiwürfel (Dichte $\rho = 11.34\,\mathrm{kg/\,dm^3}$) mit $k = 10\,\mathrm{cm}$? $\rightarrow \underline{\underline{m = 11.34\,\mathrm{kg}}}$

12. Welchen Winkel

    a) α bilden in einem Würfel Raumdiagonale und Würfelkante ?

    - $\cos(\alpha) = \frac{k}{\sqrt{3}k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 54.74^\circ}}$

    b) β bilden Raumdiagonale und Seitendiagonale ?

    - $\underline{\underline{\beta}} = 90^\circ - \alpha \approx \underline{\underline{35.26^\circ}}$

Der Quader

13. Fülle folgende Tabelle aus (die Masse beziehen sich auf einen Quader):

a	b	c	V	O
$4.2\,\mathrm{cm}$	$5.5\,\mathrm{m}$	$2.5\,\mathrm{dm}$	$57.8\,\mathrm{dm}^3$	$277.56\,\mathrm{dm}^2$
$7.8\,\mathrm{cm}$	$1.5\,\mathrm{cm}$	$c = 3\,\mathrm{cm}$	$35.1\,\mathrm{cm}^3$	$79.2\,\mathrm{cm}^2$
$35\,\mathrm{dm}$	$2.5\,\mathrm{cm}$	$3.6\,\mathrm{dm}$	$31.5\,\mathrm{dm}^3$	$28.75\,\mathrm{dm}^2$
$2.4\,\mathrm{dm}$	$0.40\,\mathrm{m}$	$0.5\,\mathrm{dm}$	$4.8\,\mathrm{dm}^2$	$25.6\,\mathrm{dm}^2$
		$6.0\,\mathrm{dm}$	$216\,\mathrm{dm}^3$	$228\,\mathrm{dm}^2$
	$1.0\,\mathrm{cm}$		$2.0\,\mathrm{cm}^3$	$10.0\,\mathrm{cm}^2$

- Ein paar Ausrechnungen:
- Z1: $\underline{\underline{V}} = 0.42\,\mathrm{dm} \cdot 55\,\mathrm{dm} \cdot 2.5\,\mathrm{dm} = \underline{\underline{57.8\,\mathrm{dm}^3}}$
- Z1: $\underline{\underline{O}} = 2 \cdot 0.42\,\mathrm{dm} \cdot 55\,\mathrm{dm} + 2 \cdot 0.42\,\mathrm{dm} \cdot 2.5\,\mathrm{dm} + 2\dot{5}5\,\mathrm{dm} \cdot 2.5\,\mathrm{dm} = \underline{\underline{277.56\,\mathrm{dm}^2}}$
- Z4: $c : 2(2.4\,\mathrm{dm} \cdot 4\,\mathrm{dm} + 2.4\,\mathrm{dm} \cdot c + 4\,\mathrm{cm} \cdot c) = 25.6\,\mathrm{cm}^2 \Rightarrow \underline{\underline{c = 0.5\,\mathrm{dm}}}$

14. Ein Quader hat folgende Masse: $l = 5\,\mathrm{cm}, b = 8\,\mathrm{cm}$ und $c = 6\,\mathrm{cm}$. Berechne seine Raumdiagonale D

- $\underline{\underline{D}} = \sqrt{5^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{125} \approx \underline{\underline{11.18\,\mathrm{cm}}}$

15. Ein Quader habe eine Länge von 12 cm, eine Breite von 8 cm und eine Höhe von 4 cm.

    a) Wieviele Würfel mit einer Kantenlänge von 1 cm könnte man in diesem Quader unterbringen ?
    - $12 \cdot 8 \cdot 4 = 384 \Rightarrow \underline{\underline{384 \text{ Würfel}}}$

    b) Wieviele Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm könnte man in diesem Quader unterbringen ?
    - $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48 \Rightarrow \underline{\underline{48 \text{ Würfel}}}$

16. Ein quaderförmiger Blechbehälter mit $a = 32\,\text{cm}$, $b = 15\,\text{cm}$ und $c = 41\,\text{cm}$ ist oben offen und besteht aus 1 mm starkem Stahlblech (Dichte $\rho = 7.8\,\text{kg}/\,\text{dm}^3$). Berechne:

    a) Wieviel Liter Wasser fasst der Behälter ?
    - $\underline{\underline{V}} = 31.8\,\text{cm} \cdot 14.8\,\text{cm} \cdot 40.9\,\text{cm} = 19249.2\,\text{cm}^3 \approx \underline{\underline{19.25\,\text{dm}^3}}$

    b) Wie lang ist eine Raumdiagonale ?
    - $\underline{\underline{D}} = \sqrt{31.8^2\,\text{cm}^2 + 14.8^2\,\text{cm}^2 + 40.9^2\,\text{cm}^2} \approx \underline{\underline{53.88\,\text{cm}}}$

    c) Wie gross ist die Masse des Behälters ?
    - Das Volumen des Ganzen Körpers minus das Volumen des Innenraums ergibt das Volumen des Stahlbleches.
    - $V_2 = 32\,\text{cm} \cdot 15\,\text{cm} \cdot 41\,\text{cm} = 19680\,\text{cm}^3$
    - $V_{SB} = 19680\,\text{cm}^3 - 19249.2\,\text{cm}^3 = 430.8\,\text{cm}^3$
    - $7.8\,\text{kg}/\,\text{dm}^3 = 7.8\,\text{g}/\,\text{cm}^3$
    - $\underline{\underline{m}} = 7.8\,\text{g}/\,\text{cm}^3 \cdot 430.8\,\text{cm}^3 = 3360\,\text{g} \approx \underline{\underline{3.4\,\text{kg}}}$

17. Ein Granitquader, der 3.5 m lang und je 90 cm breit und hoch ist, wird so ausgehölt, dass an den Seiten und unten eine 15 cm dicke Wand stehen bleibt. Welche Masse hat der Hohlkörper, wenn Granit die Dichte $2.8\,\text{g}/\,\text{cm}^3$ besitzt ?

    - $V = 35\,\text{dm} \cdot 9\,\text{dm} \cdot 1.5\,\text{dm} + 2 \cdot 35\,\text{dm} \cdot 1.5\,\text{dm} \cdot 7.5\,\text{dm} + 2 \cdot 7.5\,\text{dm} 6\,\text{dm} \cdot 1.5\,\text{dm} = 1395\,\text{dm}^3$
    - $2.8\,\text{g}/\,\text{cm}^3 = 2.8\,\text{kg}/\,\text{dm}^3$
    - $\underline{\underline{m}} = 1395\,\text{dm}^3 \cdot 2.8\,\text{kg}/\,\text{dm}^3 = \underline{\underline{3906\,\text{kg}}}$

18. Aufgabe noch nicht lösbar (führt auf eine Gleichung 2.Grades)

19. Ein senkrechtes Prisma mit der Höhe $h = 10\,\text{cm}$ hat gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $a = 8\,\text{cm}$ als Grundseiten. Berechne das Volumen dieses Prismas.

    - $A_D \approx 27.71\,\text{cm}^2$
    - $\underline{\underline{V_P}} \approx 27.71\,\text{cm}^2 \cdot 10\,\text{cm} \approx \underline{\underline{277\,\text{cm}^3}}$

20. Die chinesische Mauer ist 3460 km lang, ihr Querschnitt ist ein durchschnittlich 8 m hohes Trapez, das oben 6 m und unten 7.5 m breit ist.

    a) Welches Volumen hat die Mauer ?
    - Fläche des Trapezes: $A_{Tr} = \dfrac{6\,\text{m} + 7.5\,\text{m}}{2} \cdot 8\,\text{m} = 54\,\text{m}^2 = 0.054\,\text{km}^2$
    - $V_M = 3460\,\text{km} \cdot 0.054\,\text{km}^2 = 186.84\,\text{km}^3$

    b) Wie hoch könnte man mit dem zu Staub zermahlenen Baumaterial der Mauer die Schweiz bedecken, deren Fläche ca. $42000\,\text{km}^2$ beträgt ?
    - $V = G \cdot h$, wobei V das Volumen der Mauer und G die Grösse der Schweiz ist.
    - $\underline{\underline{h}} = \dfrac{V}{G} = \dfrac{186.84\,\text{km}^3}{42000\,\text{km}^2} \approx 0.004\,\text{km} \approx \underline{\underline{4\,\text{m}}}$

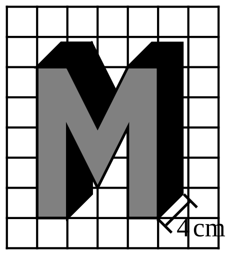
21. Der Giebel eines Hauses ist ein gleichschenkliges Dreieck mit 8.0 m langer Grundseite und 3.5 m Höhe. Die Höhe vom Erdboden bis zur Grundseite des Giebeldreiecks beträgt 5.2 m, die Länge des Hauses beträgt 10 m.

   a) Wie gross ist das Volumen des Hauses ?
      - Volumen des Quaders: $V_Q = 10\,\mathrm{m} \cdot 8\,\mathrm{m} \cdot 5.2\,\mathrm{m} = 416\,\mathrm{m}^3$
      - Fläche Dreieck: $A = 8\,\mathrm{m} \cdot 3.5\,\mathrm{m}/2 = 14\,\mathrm{m}^2$
      - Volumen des Daches: $V_D = 14\,\mathrm{m}^2 \cdot 10\,\mathrm{m} = 140\,\mathrm{m}^3$
      - $\underline{\underline{V_{Gesamt}}} = 416\,\mathrm{m}^3 + 140\,\mathrm{m}^3 = \underline{\underline{556\,\mathrm{m}^3}}$

   b) Was kostet das Dach, wenn $1\,\mathrm{m}^2$ Dachfläche 235 Fr kostet ?
      - $O_D = 2 \cdot \sqrt{4^2\,\mathrm{m}^2 + 3.5^2\,\mathrm{m}^2} \cdot 10\,\mathrm{m} \approx 106.3\,\mathrm{m}^2$
      - $\underline{\underline{K_D}} = 106.3 \cdot 235\,\mathrm{Fr} \approx \underline{\underline{25000\,\mathrm{Fr}}}$

22. Berechne die ungefähre Masse des Buchstabens M (1 H. = 2 cm), wenn er

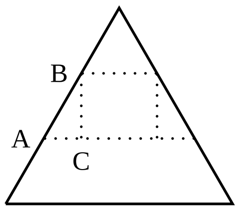
   a) massiv ist und aus Aluminium der Dichte $2.70\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ besteht.
      - Die beiden langen Seiten von M: $2 \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot 10\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm} = 160\,\mathrm{cm}^3$
      - Die beiden weiteren Teile: $2 \cdot 4\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm} \cdot 2\,\mathrm{cm} = 64\,\mathrm{cm}^3$
      - $V_G = 160\,\mathrm{cm}^3 + 64\,\mathrm{cm}^3 = 224\,\mathrm{cm}^3$
      - $\underline{\underline{m}} = V \cdot \rho 224\,\mathrm{cm}^3 \cdot 2.70\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3 = 604.8\,\mathrm{g} \approx \underline{\underline{600\,\mathrm{g}}}$



   b) (Zusatz) innen hohl ist und aus Stahlblech der Dicke 1.50 mm und der Dichte $7.90\,\mathrm{g}/cm^3$ besteht.

23. Ein senkrechtes Prisma mit der Höhe $h = 10\,\mathrm{cm}$ hat gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $a = 10\,\mathrm{cm}$ als Grundseiten. Berechne das Volumen eines Körpers, der aus dem Prisma so hergestellt wird:

   - (linke Figur)
     – Höhe des Dreiecks: $h = \sqrt{(10\,\mathrm{cm})^2 - (5\,\mathrm{cm})^2} \approx 8.66\,\mathrm{cm}$
     – $V \approx 5\,\mathrm{cm} \cdot 8.66\,\mathrm{cm} \cdot 10\,\mathrm{cm} \approx 433\,\mathrm{cm}^3$
   - (mittlere Figur) Auf die Grundseiten wird ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 5\,\mathrm{cm}$ eingezeichnet, wobei die Seiten parallel zu den ursprünglichen Seiten sind (2.Figur). Der eingezeichnete Teil wird nachher herausgenommen.
     – Gleichseitiges Dreieck mit $a = 5\,\mathrm{cm}$. $h = \sqrt{5^2 - 2.5^2} \approx 4.33\,\mathrm{cm}$
     – $A_\Delta \approx 4.33\,\mathrm{cm} \cdot 2.5\,\mathrm{cm} \approx 10.83\,\mathrm{cm}^2$
     – $\underline{\underline{V}} = 10.83\,\mathrm{cm}^2 \cdot 10\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{108.3\,\mathrm{cm}^3}}$
   - (rechte Figur) Auf zwei Mantelflächen (Quadrate) wird je ein Quadrat mit der Seitenlänge 10/3 eingezeichnet, dessen Seiten parallel zu denen der Mantelfläche sind und der Abstand zum Rand des Prismas immer gleich ist. Der eingezeichnete Teil wird nachher wiederum herausgenommen.
     – Zuerst wird die Höhe des ausgeschnittenen Prismas berechnet:
       ∗ Die Strecke AB hat die Länge 10/3.
       ∗ Der Winkel $\angle BAC$ misst 60°, der Winkel $\angle ABC$ misst 30°.
       ∗ Das Dreieck ΔABC ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks, deshalb gilt: $|\overline{AC}| = 10/6\,\mathrm{cm}$.



  - Weiter gilt: $|\overline{BC}| = \sqrt{(10/3)^2 - (10/6)^2} = 5/\sqrt{3}$
  - Die Grundfläche des ausgeschnittenen Prismas beträgt: $2 \cdot (5/\sqrt{3})(10/6) + (5/\sqrt{3}) \cdot 10/3 \approx 19.25\,\text{cm}^2$
  - $\underline{V_P} = 19.25\,\text{cm}^2 \cdot 10/3\,\text{cm} = \underline{64.15\,\text{cm}^3}$
  - $\underline{\underline{V}} = 433\,\text{cm}^3 - 64.15\,\text{cm}^3 = \underline{\underline{368.86\,\text{cm}^3}}$

32. Eine Rolle Eisendraht mit einer Dichte von $7.85\,\text{g}/\text{cm}^3$ hat eine Masse von $13.5\,\text{kg}$. Wie lang ist der $2.4\,\text{mm}$ dicke Draht ?

  - Der Draht ist ein Zylinder.
  - Es gilt: $V = \pi r^2 l \Rightarrow l = \dfrac{V}{\pi r^2}$
  - Der Radius ist gegeben, gesucht ist also das Volumen.
  - $r = 1.2\,\text{mm} = 0.12\,\text{cm}$
  - $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{13500\,\text{g}}{7.85\,\text{g}/\text{cm}^3} = 1719.75\,\text{g} = 1719.75\,\text{cm}^3$
  - $\underline{\underline{l}} = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{1719.75\,\text{cm}^3}{\pi 0.12^2\,\text{cm}^2} \approx 38014.82\,\text{cm} \approx \underline{\underline{380\,\text{m}}}$

33. Berechne das Volumen und die Oberfläche der folgenden Körper.

  - Rohling einer Schraube:
    - $V_1 = \pi \cdot 2.5^2 \cdot 8 \approx 157.08$
    - $V_2 = \pi \cdot 3.75^2 \cdot 5 \approx 220.89$
    - $\underline{\underline{V \approx 377.97}}$
    - $F_1 = \pi \cdot 2.5^2 \approx 19.63$
    - $F_2 = 2\pi \cdot 2.5 \cdot 8 \approx 125.66$
    - $F_3 = \pi \cdot 3.75^2 - \pi 2.5^2 \approx 24.54$
    - $F_4 = 2\pi \cdot 3.75 \cdot 5 \approx 117.81$
    - $F_5 = \pi \cdot 3.75^2 \approx 44.18$
    - $\underline{\underline{F \approx 331.82}}$
  - Rohrstück:
    - $V_1 = \pi \cdot 3.75^2 \cdot 4 \approx 176.71$
    - $V_2 = \pi \cdot 4.5^2 \cdot 4 \approx 254.47$
    - $V_3 = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 \approx 226.19$
    - $\underline{\underline{V = 204.99}}$
    - $F_1 = \pi \cdot 3.75^2 - \pi \cdot 3^2 \approx 15.90$
    - $F_2 = 2\pi \cdot 3.75 \cdot 4 \approx 94.25$
    - $F_3 = \pi \cdot 4.5^2 - \pi 3.75^2 \approx 19.44$
    - $F_4 = 2\pi \cdot 4.5 \cdot 4 \approx 125.66$
    - $F_5 = \pi \cdot 4.5^2 - \pi \cdot 3^2 \approx 35.34$
    - $\underline{\underline{F \approx 290.59}}$
  - Rohling einer Mutter:
    - Die Grundfläche ist ein regelmässiges 6-eck, wenn wir die Kreisfläche dazunehmen.
    - Diese Grundfläche besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken.
    - Ein gleichseitiges Dreieck hat die Höhe $h = \sqrt{1.8^2 - 0.9^2} \approx 1.56$
    - Die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $A \approx 1.56 \cdot 0.9 \approx 1.40$
    - $V_1 \approx 6 \cdot 1.40 \cdot 1.6 \approx 13.44$
    - $V_2 \approx \pi \cdot 0.8^2 \cdot 1.6 \approx 3.22$

  - $\underline{\underline{V \approx 10.22}}$
  - $F_1 \approx 6 \cdot 1.40 - \pi \cdot 0.8^2 \approx 6.41$
  - $F_2 = 6 \cdot 1.6 \cdot 1.8 = 17.28$
  - $F_3 = 2\pi \cdot 0.8 \cdot 1.6 = 8.04$
  - $\underline{\underline{F}} = 2F_1 + F_2 + F_3 = \underline{\underline{38.13}}$
- Lagerblock: Die Höhe des Sockels ist unbekannt, deshalb können Volumen und Oberfläche nicht berechnet werden.