1.6 lineare Optimierung

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Gleichung mit 2 Unbekannten

1.1 Was ist eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten ?

Wir betrachten die Gleichung

$$x+y=2$$

Diese Gleichung heisst „lineare Gleichung mit 2 Unbekannten “. Linear, weil die beiden Unbekannten den Exponenten 1 haben. Die 2 Unbekannten sind x und y.

Eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten können wir allgemein folgendermassen notieren:

$$ax+by=c$$

1.2 Was ist eine Lösung einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten ?

Wir haben schon die Gleichung $2x=4$ gelöst. Hier ist 2 eine Lösung, weil wenn wir 2 in die Gleichung einsetzen, erhalten wir links und rechts das Gleiche: $2\cdot 2=4 \Rightarrow 4=4$.
Bei der Gleichung $2x+y=4$ haben wir nun 2 Unbekannte. Wir müssen nun für x und für y eine Zahl einsetzen und schauen, ob es links und rechts das Gleiche gibt:

- – $x=1$ und $y=2$.
  – Einsetzen: $2\cdot 1+2=4 \Rightarrow 2+2=4 \Rightarrow 4=4$.
  – Wir erhalten links und rechts das Gleiche, somit ist $x=1$ und $y=2$ eine Lösung der Gleichung (wir schreiben $(1;2)$).
- – $x=2$ und $y=2$.
  – Einsetzen: $2\cdot 2+2=4 \Rightarrow 4+2=4 \Rightarrow 6=4$.
  – Wir erhalten links und rechts nicht das Gleiche, somit ist $x=2$ und $y=2$ keine Lösung der Gleichung.

1.3 Wie finde ich eine Lösung einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten ?

Gegeben ist die Gleichung $x+3y=5$. Wir können nun ganz einfach eine Lösung finden:

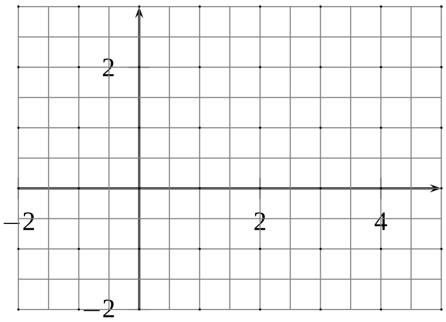
- Nimm für x irgendeinen Wert, z.B. 8.
- Setze den Wert in die Gleichung ein: $8+3y=5$
- Löse die Gleichung in 2.) nach y auf: $8+3y=5 \Rightarrow 3y=-3 \Rightarrow y=-1$.
- Wir haben nun einen x- und einen y-Wert: $x=8, y=-1$. Damit lautet eine Lösung: $(8;-1)$.

1.4 Wie sieht die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten graphisch aus ?

Gegeben ist die Gleichung $2x + 4y = 6$. Wir berechnen nun 3 Lösungen:

	1.Lösung	2.Lösung	3.Lösung
x-Wert bestimmen	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
Einsetzen:	$2 \cdot 1 + 4y = 6$	$2 \cdot 2 + 4y = 6$	$2 \cdot 3 + 4y = 6$
Ausrechnen:	$2 + 4y = 6$	$4 + 4y = 6$	$6 + 4y = 6$
nach y auflösen:	$4y = 4$	$4y = 2$	$4y = 0$
nach y auflösen:	$y = 1$	$y = 0.5$	$y = 0$
x- und y-Wert:	$x = 1, y = 1$	$x = 2, y = 0.5$	$x = 3, y = 0$
Lösung:	(1;1)	(2;0.5)	(3;0)

Wir zeichnen diese drei Werte in ein Koordinatensystem:



Beobachtung:

Übungen

1. Gib ein Beispiel einer Gleichung, die nicht eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten ist, weil
   a) die Anzahl der Unbekannten nicht stimmt.
   b) die Linearität verletzt ist.
2. Bestimme die Werte der Parameter a, b und c !
   a) y = 4x+5 b) 3 = 2y-6x c) $\frac{3}{4} = \frac{2x}{3} + \frac{y}{6}$
3. Stelle die Lösungsmenge graphisch dar !
   a) $y = 4x + 5$ b) $3 = 2y - 6x$ c) $\frac{3}{4} = \frac{2x}{3} + \frac{y}{6}$
4. Die Lösungsmengen der folgenden Aufgaben sind Geraden. Welche Steigung und welchen Schnittpunkt mit der y-Achse haben die Geraden ? Kontrolle zeichnerisch Dein Ergebnis.
   a) $y = 4x + 5$ b) $3 = 2y - 6x$

1.5 Die Lösung eines lin. Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten wird zeichnerisch ermittelt

Wir wollen die Gedanken aus dem oberen Abschnitt übertragen auf ein Gleichungssystem.

Beispiel

Löse folgendes Gleichungssystem zeichnerisch ! Überprüfe Dein Ergebnis durch Einsetzen !

$$\left| \begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{array} \right|$$

5. Löse das folgende Gleichungssystem zeichnerisch ! Überprüfe durch Einsetzen ! Wieviele Lösungen kann ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten haben ?

$$\left| \begin{array}{l} 2x+y=1 \\ x+2y=3 \end{array} \right|$$

2 Lineare Ungleichung mit 2 Unbekannten

Unter einer linearen Ungleichung mit 2 Unbekannten verstehen wir eine Ungleichung der Form

$$ax+by \leq c$$

wobei anstatt $\leq$ auch $<, \geq$ oder $>$ stehen kann.

Es jetzt natürlich wieder um die Frage:

Frage: Wie kann die Lösungmenge einer solchen Ungleichung ermittelt werden ?

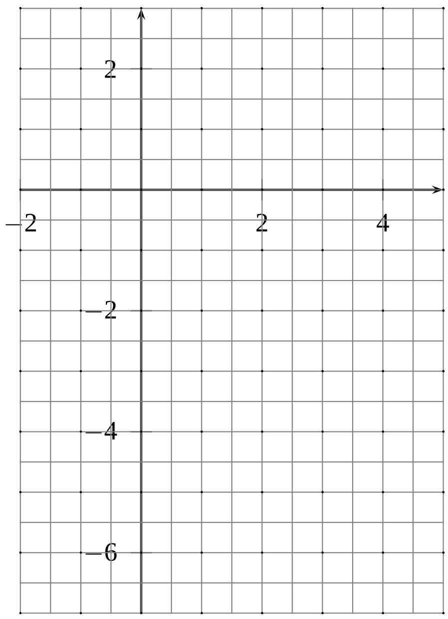
Wir gehen exemplarisch vor. Wir nehmen obiges Beispiel, ersetzen aber das Gleichheitszeichen mit einem Kleiner-Zeichen. So können wir auch gleich den Zusammenhang zur Gleichung aufstellen.

Beispiel

$$2x + 4y < 6$$

	1.Lösung	2.Lösung	3.Lösung
x-Wert bestimmen	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
1.Zahlenpaar:			
2.Zahlenpaar:			
3.Zahlenpaar:			

Wir zeichnen diese Lösungen in unterstehendes Koordinatensystem ein.



Beobachtung:

Übung

6. Welche Zahlenpaare sind Lösungen der Ungleichung $10x - 12y < -9$?

   a) (0;0) b) (6;5) c) (5;6)

   d) (-1;0) e) (-0.5;0.5) f) (1000;1001)

7. Stelle die Lösungsmenge für die untenstehenden Gleichungen/Ungleichungen grafisch dar. Benutze für (a) die Farbe Rot, für (b) die Farbe blau und für (c) die Farbe Grün.

a) $y = x + 1$ b) $y < x + 1$ c) $y > x + 1$

8. Stelle die Lösungsmenge für die folgenden Ungleichungen grafisch dar.

   a) $y \leq x + 1$ b) $y > 3x - 1$ c) $2x + 3y \leq x + 1$

9. Maria fragt ihre Grosseltern nach deren Alter

   - Der Grossvater antwortet: Ich bin mindestens fünfmal so alt wie Du und mindestens so alt wie Deine Grossmutter.
   - Die Grossmutter antwortet: Ich bin mindestens viermal so alt wie Du. Ich und Dein Grossvater sind zusammen 150 Jahre alt.

   Wie alt sind Grossmutter und Grossvater höchstens ?

3 Lineare Ungleichungssysteme

Der Begriff Ungleichungssystem ist selbsterklärend. Im Gegensatz zum Gleichungssystem haben wir nun Ungleichungen, die alle gleichzeitig erfüllt sein müssen.

Beispiel

Stelle die Lösungsmenge des folgenden Ungleichungssystems zeichnerisch dar.

$$\left|\begin{array}{l} 2x + y < 3 \\ x - y > 2 \end{array}\right|$$

10. Stelle die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungssysteme zeichnerisch dar.

    a) $\left|\begin{array}{l} y < 3x + 5 \\ y > -2x \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} -x + 2y < 2 \\ x - y > 3 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} 2x - y + 2 > 0 \\ x - 2y - 2 < 0 \\ y + 3 > 0 \end{array}\right|$

11. Für zwei natürliche Zahlen x und y gilt: $x+y \leq 10$ und $x+2 \leq y$.

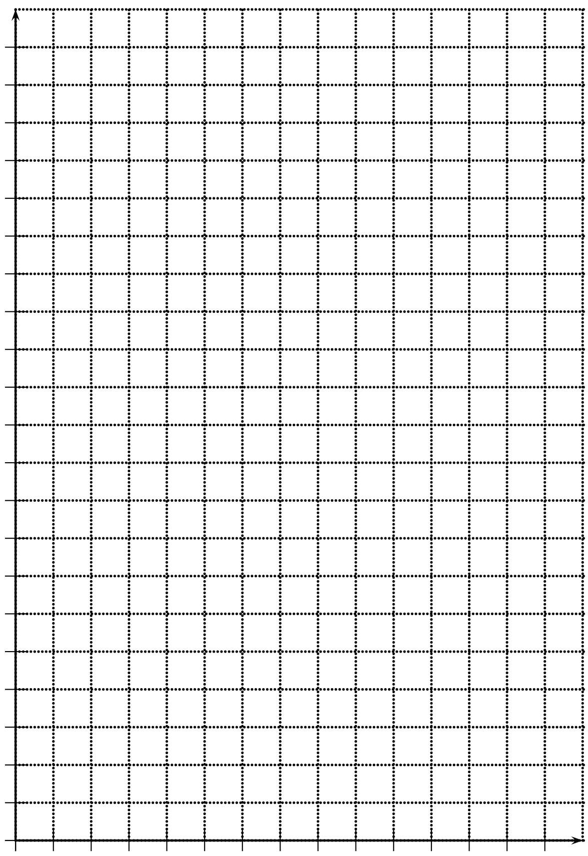
   a) Beantworte mit Probieren: Wann nimmt der Term $2x+y$ den grössten Wert an ?

   b) Beantworte die Frage aus (a) zeichnerisch

4 Die lineare Optimierung

In diesem Abschnitt werden wir nun Aufgaben lösen, die einen praktischen Bezug haben. Wie der Titel des Abschnittes sagt, geht es um Optimierung (übersetzt „das Beste "). Unter gegebenen Bedingungen soll der Gewinn so gross wie möglich sein, die Arbeitskosten so niedrig wie möglich, die Belastung so niedrig wie möglich, usw.

Einführungsaufgabe Die Einkäuferin eines Modegeschäfts bestellt bei einem Grosshändler Mäntel und Jacken. Es sollen zwischen 20 und 100 Mäntel und zwischen 30 und 120 Jacken sein. Der Einkaufspreis liegt für einen Mantel bei 200 Fr und für eine Jacke bei 160 Fr. Der Einkäuferin stehen 32000 Fr zur Verfügung. Sie nimmt an, dass beim Verkauf eines Mantels 150 Fr und beim Verkauf einer Jacke 100 Fr Gewinn erzielt werden. Wieviele Mäntel und Jacken kauft sie ein, um einen möglichst hohen Gewinn zu erzielen ?



12. Eine Raffinerie bezieht Erdöl von zwei Lieferfirmen L_1 und L_2. Sie kann höchstens $500t$ Erdöl am Tag verarbeiten. Aufgrund langfristiger Lieferverträge muss sie von L_1 täglich $50t$, von L_2 täglich $80t$ abnehmen. L_1 und L_2 können jedoch täglich nicht mehr als $400t$ bzw. $200t$ liefern. Der Gewinn bei der Verarbeitung von $1t$ Erdöl beläuft sich auf 40 Fr bzw. 50 Fr bei den beiden Sorten.

    a) Bei welchen Verarbeitungsmengen wird der Gewinn maximal ?

    b) Wie müssten die Verarbeitungsmengen gewählt werden, wenn beide Sorten gleichviel Gewinn abwerfen (Es soll wiederum der Gewinn maximal werden) ?

13. Ein Betrieb stellt zwei verschiedene Produkte X und Y her. Für die Anfertigung von einem Stück X benötigt man 5h und verbraucht Material im Wert von 5 Fr, für Y benötigt man 6h und verbraucht Material im Wert von 0.6 Fr. Der Finanzplan erlaubt es, täglich bis zu 1500 Fr für Material auszugeben. Aus technischen Gründen können von Y höchstens 550 Stück pro Tag produziert werden. Die Lagerkapazität erlaubt es nicht, dass die Gesamtproduktion von X und Y 800 Stück überschreitet. Nun bringt das Produkt X pro Stück einen Gewinn von 8 Fr, Y hingegen nur 5 Fr. Welche Stückzahlen von X und Y soll der Fabrikant pro Tag herstellen lassen, damit sein Gewinn maximal wird ?

14. Ein Baustoffhändler beliefert eine Baustelle mit Kalk (1 Sack wiegt 35 kg) und Zement (1 Sack wiegt 50 kg). Sein LKW kann höchstens $3t$ laden. Die Baustelle braucht mindestens halb und höchstens doppelt so viel Zement wie Kalk.

    a) Für einen gelieferten Sack Kalk erhält der Händler 2 Fr, für einen gelieferten Sack Zement 4 Fr. Wie muss der LKW beladen werden, damit die Lieferung einen möglichst hohen Gewinn abwirft ?

    b) Wie muss der LKW beladen werden, damit möglichst viele Säcke transportiert werden ?

15. Ein Landwirt besitzt 100 ha Land. Einen Teil will er mit Kartoffeln bepflanzen, einen anderen mit Getreide. Ausserdem sind die folgenden Informationen gegeben:

	Kartoffeln	Getreide	zur Verfügung
Anbaukosten in Geldeinheiten pro ha	10	20	1100
Arbeitszeit in Zeiteinheiten pro ha	1	4	160
Ertrag pro ha	400	1200	

    Wie muss der Landwirt den Anbau organisieren, um einen möglichst grossen Ertrag zu erzielen ?

16. Die Mitglieder einer Expedition benötigen für den geplanten Funkverkehr Batterien. Die beiden Sorten A und B kommen dafür in Frage. Die Menge der Batterien wird nun nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeschränkt: Der verfügbare Raum für die Batterien ist 7 Liter, das Gesamtgewicht ist auf 8 kg zu beschränken, dazu sollen die Kosten 12 Einheiten nicht überschreiten. Die Hersteller machen folgende Angaben über die beiden Typen:

Für eine Batterie	Typ A	Typ B
Volumen in Liter	1	1
Gewicht in kg	2	1
Preis in Einheiten	4	1
Betriebsdauer in Tagen	8	3

    Wieviel von jeder Sorte müssen die Mitglieder mit auf die Expedition nehmen, wenn die Gesamtbetriebsdauer möglichst gross sein soll ?

17. Eine Kosmetikfirma produziert zwei Sorten Badeöle A und B. Jedes Badeöl wird aus drei Zwischenprodukten zusammengesetzt, die von drei Automaten A_1, A_2 und A_3 hergestellt werden. Die Tabelle zeigt die Einsatzzeiten für jeden Automaten (Jeder Automat kann täglich höchstens 6 Stunden benützt werden).

Automat	Zeit pro Liter Badeöl in Min. von A	Zeit pro Liter Badeöl in Min. von B
A_1	4.5	3
A_2	4	4
A_3	1.5	6

Wieviel Liter von A und B wird man täglich herstellen, wenn der Gewinn pro Liter 15 Fr bei A und 20 Fr bei B beträgt und der Gesamtgewinn maximal sein soll ?