1.5 lineare Gleichungssysteme

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten ?

Ein **Beispiel** eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{l} 2x+y=15 \\ x-4y=3 \end{array} \right|$$

- zwei Gleichungen ist klar, zwei Unbekannte (x und y) ebenfalls.
- Gleichungssystem: Unter System versteht man etwas Abgeschlossenes, in diesem Falle heisst das, dass die Gleichungen zusammengehören.
- linear bedeutet, dass die Unbekannten nur in der Form x, y und z vorkommen, also kein $x^2, \sqrt{y}, z^3$, usw. und auch keine Kombinationen wie z.B. xy, xyz, usw. enthalten.

Bei einem Gleichungssystem geht es um folgende Frage:

Frage: Was muss ich für x und y einsetzen, damit bei der ersten Gleichung links und rechts das Gleiche steht **und** bei der zweiten Gleichung links und rechts das Gleiche steht ?

Setzen wir bei unserem Beispiel $x = 7$ und $y = 1$:

- einsetzen in die obere Gleichung: $2 \cdot 7 + 1 = 15$ ✓
- einsetzen in die untere Gleichung: $7 - 4 \cdot 1 = 3$ ✓

Wir sehen, dass $x = 7$ und $y = 1$ das Gleichungssystem löst (Wie man diese Lösung ermittelt, sehen wir später).

Während die Lösung einer Gleichung wie $3x = 6$ eine Zahl ($x = 2$) ist, besteht die Lösung eines Gleichungssystems nun aus zwei Zahlen ($x = 7$ und $y = 1$). Wir notieren diese Lösung in der Form (7;1). Damit können wir schreiben: $\mathbf{L} = \{(7;1)\}$

Übungen

1. Für welche der folgenden Gleichungssyteme ist (3,-1) eine Lösung ?

   a) $\left| \begin{array}{l} x+y=2 \\ 2x+5y=1 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} 2x-y=7 \\ x-3y=3 \end{array} \right|$

   c) $\left| \begin{array}{l} 3x=6 \\ 2y=-2 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} 6=7 \\ x-3y=6 \end{array} \right|$

2. Die folgenden Gleichungssysteme haben eine besonders einfache Form. Löse sie.

   a) $\left| \begin{array}{l} 2x=5 \\ 4y=6 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} 2x-4y=0 \\ 4x=8 \end{array} \right|$

   c) $\left| \begin{array}{l} 2x-4y=0 \\ 4y=4 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} 2=3 \\ 4x+y=8 \end{array} \right|$

2 Wie lösen wir ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten ?

In diesem Abschnitt lernen wir, wie wir ein Gleichungssystem lösen können, d.h. wir können herausfinden, welche Werte wir für x und y einsetzen müssen, damit wir in beiden Gleichungen auf der linken und auf der rechten Seite das Gleiche erhalten.

Idee: Wir können die erste Gleichung nach x auflösen und das Ergebnis dann in die zweite Gleichung einsetzen. Diese Methode nennen wir **Einsetzungsmethode**.

Beispiel

$$\left| \begin{array}{l} x-5=5y-25 \\ x+3=3y+9 \end{array} \right|$$

- Erste Gleichung nach x auflösen: $x=5y-20$
- Anstatt x schreiben wir in der zweiten Gleichung $5y-20 \Rightarrow 5y-20+3=3y+9$
- $5y-17=3y+9 \Rightarrow 2y=26 \Rightarrow \underline{y=13}$
- $\underline{x}=5\cdot 13-20=\underline{45}$
- $\underline{\underline{\mathbf{L}=\{(45;13)\}}}$

Übungen

3. Löse die folgenden Gleichungssysteme mit der Einsetzungsmethode und kontrolliere durch Einsetzen !

   a) $\left| \begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} 2x+4y=6 \\ x-3y=1 \end{array} \right|$

   c) $\left| \begin{array}{l} x-8y=6 \\ x-3y=4 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} \frac{x+y}{2}+\frac{4y}{3}=0 \\ 5-y=\frac{x+y}{2} \end{array} \right|$

4. Löse das folgende Gleichungssystem nach x und y auf.

$$\left| \begin{array}{l} 4x+6y=3 \\ bx-2y=1 \end{array} \right|$$

5. Bestimme die Parameter a und b so, dass das System die Lösung $x=4, y=-4$ besitzt.

$$\left| \begin{array}{l} x+ay=1 \\ bx+2y=4 \end{array} \right|$$

6. Vor 5 Jahren war der Vater 5 mal so alt wie der Sohn. In 3 Jahren wird er 3 Mal so alt sein wie der Sohn. Wie alt sind die beiden jetzt?

7. Gesucht sind Zähler und Nenner eines Bruches. Wenn wir bei Zähler und Nenner 5 subtrahieren, dann ergibt die Division von Zähler und Nenner 0.5. Wenn wir bei Zähler und Nenner 11 addieren, dann ergibt die Division von Zähler und Nenner 0.9. Welchen Wert haben der Zähler und der Nenner ?

8. Wieviel 12 prozentigen Spiritus und wieviel 84 prozentigen Spiritus müssen wir nehmen, um 7200 Liter 18 prozentigen Spiritus zu erhalten?

3 Eine zweite Methode, um das Gleichungssystem zu lösen.

Im Abschnitt 2 haben wir die Einsetzungsmethode kennengelernt. Sie ist bei bestimmten Gleichungssystemem ziemlich umständlich.

In diesem Abschnitt lernen wir eine neue Methode kennen, mit der wir das Gleichungssystem ebenfalls lösen können. Mit ihr lassen sich gewisse Gleichungssysteme bedeutend einfacher lösen (dazu später mehr). Wir betrachten noch einmal das Beispiel aus Abschnitt 2.

Beispiel

$$\left| \begin{array}{l} x-5=5y-25 \\ x+3=3y+9 \end{array} \right|$$

- Umordnen (zuerst x, dann y, rechts vom Gleichheitszeichen die Zahl): $\left| \begin{array}{l} x-5y=-20 \\ x-3y=6 \end{array} \right|$
- Die zweite Gleichung von der ersten subtrahieren, damit die x verschwinden: $-2y=-26 \Rightarrow \underline{y=13}$.
- $y=13$ in eine der Gleichungen einsetzen (wir wählen die erste): $x-5=5(13-5) \Rightarrow \underline{x}=65-25+5=\underline{45}$.
- $\underline{\underline{\mathbf{L}=\{(45;13)\}}}$

Diese Methode heisst **Additionsmethode**, weil hier Gleichungen miteinander addiert (und auch subtrahiert) werden.

Übungen

8. Addiere die folgenden Gleichungen miteinander !
   a) $3x+4y=5$ und $x-6y=3$
   b) $-4x+4y=0$ und $-x+6y=-4$
   c) $2x-3y+3=-6$ und $3x=4$
9. Subtrahiere die folgenden Gleichungen voneinander !
   a) $3x+4y=5$ und $x-6y=3$
   b) $-4x+4y=0$ und $-x+6y=-4$
   c) $2x-3y+3=-6$ und $3x=4$
10. Löse die folgenden Gleichungssysteme mit der Additionsmethode und vergleiche mit der Aufgabe 3 !
    a) $\left| \begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \end{array} \right|$
    b) $\left| \begin{array}{l} 2x+4y=6 \\ x-3y=1 \end{array} \right|$
    c) $\left| \begin{array}{l} x-8y=6 \\ x-3y=4 \end{array} \right|$
    d) $\left| \begin{array}{l} \frac{x+y}{2}+\frac{4y}{3}=0 \\ 5-y=\frac{x+y}{2} \end{array} \right|$

4 Wie lösen wir ein Gleichungssystem mit Parametern ?

Unter Parametern verstehen wir Variabeln, nach denen aber nicht aufgelöst werden soll. Wir „schleppen sie einfach mit “. Ein Gleichungssystem mit Parametern können wir mit der gleichen Vorgehensweise lösen wie ein Gleichungssystem ohne Parameter. Es treten meistens aber noch ein paar Schwierigkeiten auf, die wir sonst nicht haben.

Beispiel

$$\left| \begin{array}{l} 4x+6y=4 \\ 2bx-4y=2 \end{array} \right|$$

- Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 2 und die zweite Gleichung mit 3 und erhalten:

$$\left| \begin{array}{l} 8x+12y=8 \\ 6bx-12y=6 \end{array} \right|$$

- Wir addieren die erste und zweite Gleichung miteinander und erhalten:

$$8x+6bx=14$$

- Die Gleichung lässt sich nun mit Faktorsieren nach x auflösen.

$$x(8+6b)=14 \Rightarrow x=\frac{14}{8+6b}$$

- Den x-Wert in die erste Gleichung einsetzen:
  $4\frac{14}{8+6b}+6y=4$
  $\Rightarrow 6y=4-4\frac{7}{4+3b}=\frac{4(4+3b)}{4+3b}-\frac{28}{4+3b}=\frac{16+12b-28}{4+3b}=\frac{-12+12b}{4+3b}=\frac{12(b-1)}{4+3b}$
  $\Rightarrow \underline{y}=\frac{12(b-1)}{6(4+3b)}=\underline{\frac{2(b-1)}{4+3b}}$

- Wir können nun die Lösungsmenge notieren:

$$\mathbf{L}=\left\{\left(\frac{7}{4+3b};\frac{2(b-1)}{4+3b}\right)\right\}$$

- Den y-Wert haben wir nur sehr mühsam erhalten. Einfacher geht es, wenn wir die Additionsmethode ein zweites Mal anwenden:

Übungen

11. Löse die folgenden Gleichungssysteme nach x und y auf.

a) $\left| \begin{array}{l} 4x+6y=3 \\ bx-2y=1 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} (q+2)x+y=q \\ qx+3y=1 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} (c-6)x-y=0 \\ cx+y=2 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} px+y=0 \\ x-py=0 \end{array} \right|$

5 Die Definition eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Definition 1 *Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten können wir allgemein folgendermassen notieren:*

$$\left| \begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array} \right|$$

(Die Zahlenbereiche für die Parameter a,b,c,d,e und f lassen wir der Einfachheit halber weg)

12. Entscheide, ob ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten vorliegt ! Falls ja, dann bestimme a,b,c,d,e und f !

a) $\left| \begin{array}{c} -x+3y=0 \\ x=6 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{c} 3y=5 \\ 4y=6x \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{c} 2xy=5 \\ 4y=6 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{c} 2x=5y \\ 4x=6z \end{array} \right|$

6 Die allgemeine Lösung

Wir ermitteln die Lösung des allgemeinen Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten:

- Multipliziere die erste Gleichung mit e und die zweite Gleichung mit b. Wir erhalten:

$$\left| \begin{array}{l} aex+bey=ce \\ bdx+bey=bf \end{array} \right|$$

- Subtrahiere die zweite Gleichung von der ersten Gleichung. Wir erhalten:

$$aex-bdx=ce-bf$$

- Nach x auflösen:

$$x(ae-bd)=ce-bf \Rightarrow \underline{x=\frac{ce-bf}{ae-bd}}$$

Nun lösen wir das Gleichungssystem nach y auf:

- Wir beginnen noch einmal von vorne:

$$\left| \begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array} \right|$$

- Multipliziere die erste Gleichung mit d und die zweite Gleichung mit a. Wir erhalten:

$$\left| \begin{array}{l} adx+bdy=cd \\ adx+aey=af \end{array} \right|$$

- Subtrahiere die zweite Gleichung von der ersten Gleichung. Wir erhalten:

$$bdy-aey=cd-af$$

- Nach y auflösen:

$$y(bd-ae)=cd-af \Rightarrow \underline{y}=\frac{cd-af}{bd-ae}=\underline{\frac{af-cd}{ae-bd}}$$

Die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und höchstens 2 Unbekannten lautet somit:

$$\boxed{\mathbf{L}=\left\{\left(\frac{ce-bf}{ae-bd};\frac{af-cd}{ae-bd}\right)\right\}}$$

Wir haben eine Formel herausgefunden, mit der wir direkt die Lösungen berechnen können.

Es fällt sofort auf, dass wir Brüche haben. Dann taucht sofort der Gedanke auf: Der Nenner des Bruches darf nie 0 werden, damit darf ae-bd nie null werden. Erste Folgerung: Wenn ae-bd nicht Null ist, dann erhalten wir eine Lösung, ansonsten gibt es etwas undefiniertes und damit keine Lösung. Wir können diese Überlegung überprüfen, indem wir die Lösungsmenge graphisch darstellen. Wie das geht, sehen wir im nächsten Abschnitt.

Übungen

13. Löse die folgenden Gleichungssysteme mit der Lösungsformel und vergleiche Deine Ergebnisse mit der Aufgabe 3 !

a) $\left| \begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} 2x+4y=6 \\ x-3y=1 \end{array} \right|$

7 Wieviele Lösungen hat ein lin. Gl.-system mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten ?

Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} x+y=2 \\ 2x-y=0 \end{array}$$

7.1 Lineare Gleichung mit 2 Unbekannten

Wir betrachten zuerst die obere Gleichung. Es liegt eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten vor. Linear, weil die beiden Unbekannten den Exponenten 1 haben. Die 2 Unbekannten sind x und y. Die untere Gleichung ist damit ebenfalls eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten.

7.2 Was ist eine Lösung einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten ?

Wir haben schon die Gleichung $2x = 4$ gelöst. Hier ist 2 eine Lösung, weil wenn wir 2 in die Gleichung einsetzen, erhalten wir links und rechts das Gleiche: $2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$.
Bei der Gleichung $2x + y = 4$ haben wir nun 2 Unbekannte. Wir müssen nun für x und für y eine Zahl einsetzen und schauen, ob es links und rechts das Gleiche gibt:

1. - $x = 1$ und $y = 2$.
   - Einsetzen: $2 \cdot 1 + 2 = 4 \Rightarrow 2 + 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$.
   - Wir erhalten links und rechts das Gleiche, somit ist $x = 1$ und $y = 2$ eine Lösung der Gleichung (wir schreiben $(1;2)$).
2. - $x = 2$ und $y = 2$.
   - Einsetzen: $2 \cdot 2 + 2 = 4 \Rightarrow 4 + 2 = 4 \Rightarrow 6 = 4$.
   - Wir erhalten links und rechts nicht das Gleiche, somit ist $x = 2$ und $y = 2$ keine Lösung der Gleichung.

7.3 Wie finde ich eine Lösung einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten ?

Gegeben ist die Gleichung $x + 3y = 5$. Wir können nun ganz einfach eine Lösung finden:

1. Nimm für x irgendeinen Wert, z.B. 8.
2. Setze den Wert in die Gleichung ein: $8 + 3y = 5$
3. Löse die Gleichung in 2.) nach y auf: $8 + 3y = 5 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$.
4. Wir haben nun einen x- und einen y-Wert: $x = 8, y = -1$. Damit lautet eine Lösung: $(8; -1)$.

7.4 Wie sieht die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten graphisch aus ?

Gegeben ist die Gleichung $2x + 4y = 6$. Wir berechnen nun 3 Lösungen:

	1.Lösung	2.Lösung	3.Lösung
x-Wert bestimmen	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
Einsetzen:	$2 \cdot 1 + 4y = 6$	$2 \cdot 2 + 4y = 6$	$2 \cdot 3 + 4y = 6$
Ausrechnen:	$2 + 4y = 6$	$4 + 4y = 6$	$6 + 4y = 6$
nach y auflösen:	$4y = 4$	$4y = 2$	$4y = 0$
nach y auflösen:	$y = 1$	$y = 0.5$	$y = 0$
x- und y-Wert:	$x = 1, y = 1$	$x = 2, y = 0.54$	$x = 3, y = 0$
Lösung:	(1;1)	(2;0.5)	(3;0)

Wir zeichnen diese drei Werte nun in ein Koordinatensystem:

Beobachtung: alle drei Punkte liegen auf einer Geraden. Jeder Punkt auf der Geraden ist eine Lösung der Gleichung.

Daraus schliessen wir: **Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten ist eine Gerade.**

Übungen

14. Gib ein Beispiel einer Gleichung, die nicht eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten ist, weil
    a) die Anzahl der Unbekannten nicht stimmt.
    b) die Linearität verletzt ist.

15. Bestimme die Werte der Parameter a, b und c !

    a) y = 4x+5 b) 3 = 2y-6x c) $\frac{3}{4} = \frac{2x}{3} + \frac{y}{6}$

16. Stelle die Lösungsmenge graphisch dar !

    a) $y = 4x + 5$ b) $3 = 2y - 6x$ c) $\frac{3}{4} = \frac{2x}{3} + \frac{y}{6}$

17. Die Lösungsmengen der folgenden Aufgaben sind Geraden. Welche Steigung und welchen Schnittpunkt mit der y-Achse haben die Geraden ? Kontrolle zeichnerisch Dein Ergebnis.

    a) $y = 4x + 5$ b) $3 = 2y - 6x$

7.5 Wie kommen wir von einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten zu einer linearen Funktion ?

Eine lineare Funktion hat die Form:

$$f(x) = ax + b \text{ oder } y = ax + b$$

Eine lineare Gleichung hat die Form:

$$ax + by = c$$

Wir kommen also von der linearen Gleichung auf die Funktion 1.Grades, indem wir die Gleichung nach y auflösen.

- Gegeben ist die lineare Gleichung $8x + 4y = 20$.
- Wir lösen nach y auf: $8x + 4y = 20 \Rightarrow 4y = 20 - 8x \Rightarrow 4y = 20 - 8x \Rightarrow y = \frac{20 - 8x}{4} \Rightarrow y = 5 - 2x \Rightarrow y = -2x + 5$
- Wir können nun folgern: Die Lösungsmenge der Gleichung $8x + 4y = 20$ ist eine Gerade. Die Gerade hat die Steiung -2 und den Schnittpunkt mit der y-Achse bei 5.

7.6 Die Anzahl Lösungen eines Gleichungssystems

Gegeben ist das allgemeine Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ll} (1) & ax + by = c \\ (2) & dx + ey = f \end{array} \right|$$

- Die erste Gleichung nach y aufgelöst ergibt: $ax + by = c \Rightarrow by = c - ax \Rightarrow y = \frac{c - ax}{b} \Rightarrow y = \frac{c}{b} - \frac{ax}{b} \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.
- Die zweite Gleichung nach y aufgelöst ergibt: $dx + ey = f \Rightarrow ey = f - dx \Rightarrow y = \frac{f - dx}{e} \Rightarrow y = \frac{f}{e} - \frac{dx}{e} \Rightarrow y = -\frac{d}{e}x + \frac{f}{e}$.
- Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist eine Gerade mit der Steigung $-a/b$ und dem Schnittpunkt mit der y-Achse bei c/b.
- Die Lösungsmenge der zweiten Gleichung ist eine Gerade mit der Steigung $-d/e$ und dem Schnittpunkt mit der y-Achse bei f/e.

Wir wissen, dass der Schnittpunkt der beiden Geraden die Lösung des Gleichungssystems ist. Es gibt nun drei Fälle:

1. Die Geraden haben eine verschiedene Steigung und schneiden sich genau einmal (d.h. es gibt genau einen Schnittpunkt und damit eine Lösung)
2. Die Geraden haben die gleiche Steigung
   (a) und liegen übereinander (d.h. es gibt unendlich viele Schnittpunkte und damit unendlich viele Lösungen)
   (b) aber liegen nicht übereinander (d.h. es gibt keinen Schnittpunkt und damit keine Lösung)

Fall 1: Die Steigung ist verschieden $\Rightarrow -\frac{a}{b} \neq -\frac{d}{e} \Rightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$.

$$\boxed{\text{genau 1 Lösung, falls } \frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}}$$

Fall 2(a):

- Die Steigung gleich $\Rightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{d}{e} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e}$.
- Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist gleich $\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{f}{e}$

Damit erhalten wir:

$$\boxed{\text{unendlich viele Lösungen, falls } \frac{a}{b} = \frac{d}{e} \text{ und } \frac{c}{b} = \frac{f}{e}}$$

Fall 2(b):

- Die Steigung gleich $\Rightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{d}{e} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e}$.
- Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist nicht gleich $\Rightarrow \frac{c}{b} \neq \frac{f}{e}$

Damit erhalten wir:

$$\boxed{\text{keine Lösung, falls } \frac{a}{b} = \frac{d}{e} \text{ und } \frac{c}{b} \neq \frac{f}{e}}$$

Übungen

18. Löse das folgende Gleichungssystem zeichnerisch (Ablesen des Schnittpunktes) ! Überprüfe durch Einsetzen !

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{array} \right|$$

19. Bestimme zeichnerisch und rechnerisch die Anzahl Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left| \begin{array}{l} x - 5y = 7 \\ x = 5y + 7 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} -4x + 6y = 5 \\ 6x - 9y = 8 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} 3x + 6y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \end{array} \right|$

20. Welcher Wert muss für a eingesetzt werden, damit das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 2ax + 3y = 4 \\ 3ax - 2y = 3 \end{array} \right|$$

a) Genau 1 Lösung hat ?

b) keine Lösung hat ?

c) unendlich viele Lösungen hat ?

8 lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

Wir haben nun 3 Gleichungen und 3 Unbekannte. Nach den Unbekannten können wir mit dem gleichen Prinzip auflösen wie bei 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Betrachten wir dazu ein Beispiel.

Beispiel

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{ll} (1) & x + y + z = 60 \\ (2) & x - 3y + 2z = -4 \\ (3) & 2x + 5y - 5z = 68 \end{array} \right|$$

Übungen

21. Löse die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left|\begin{array}{l} 8x-7y+10z=9 \\ 5y+6z=0 \\ 6z=21 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 13x=156 \\ 5x+6y=0 \\ 9x+11y+2z=36 \end{array}\right|$

22. Löse die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ x+2y+2z=7 \\ 2x+4y+5z=15 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 11x-9y=30 \\ 8x-7y=20 \\ x-y+z=10 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 7x-6y+5z=18 \\ 5x+3y-4z=28 \\ 8x+2y+3z=26 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=6 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}-\frac{z}{10}=3 \\ x-\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=8 \end{array}\right|$

23. Hier sind a,b,c Parameter. Aufzulösen ist nach x,y,z.

a) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=a+b+c \\ x+y=2c \\ y+z=2a \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=4a+6b \\ 2x+3y-z=3a+5b \\ 4y+3z=10a+17b \end{array}\right|$

24. Gesucht sind drei Zahlen x, y und z, deren Summe 311 ist. Dabei unterscheiden sich die ersten beiden Zahlen um 51, die dritte ist um 21 grösser als die erste und die zweite zusammen. Bestimme die Zahlen.

25. Die 24 Kinder in Petras Klasse stammen aus drei Jahrgängen. Der älteste Jahrgang enthält 8 Kinder weniger als der mittlere. Zum jüngsten Jahrgang gehören 4 Kinder weniger als alle anderen zusammen. Wie viele Kinder sind in jedem Jahrgang?

26. Ein Wasserbehälter kann durch drei Zuleitungen gefüllt werden, und zwar durch A und B zusammen in 20, durch A und C zusammen in 40 und durch alle drei zusammen in 15 Minuten. In wie vielen Minuten wird der Behälter durch jede Leitung einzeln gefüllt?