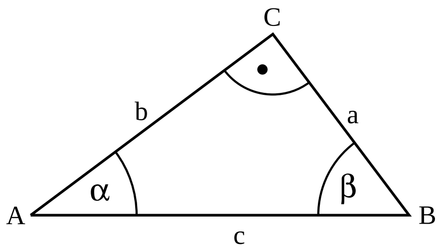
1.4 Trigonometrie

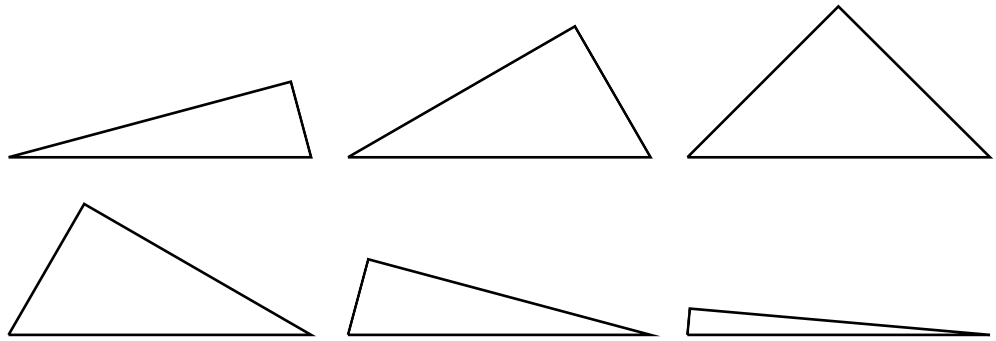
Inhaltsverzeichnis

1 Seitenverhältnisse beim rechtwinkligen Dreieck

Wir betrachten jeweils rechtwinklige Dreiecke ΔABC mit den folgenden Bezeichnungen:



Unten sind 6 rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln 15°,30°,45°,60°,75° und 85° gezeichnet.

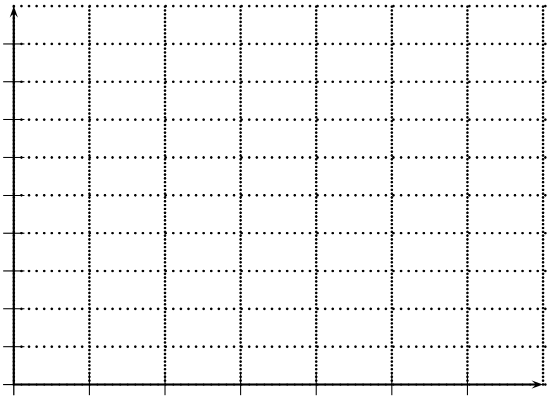


Einführungsaufgaben

1. Berechne bei den oberen 6 Dreiecken die Werte der Verhältnisse $\overline{BC} : \overline{AB}$ durch Abmessung (d.h. wenn z.B. $\overline{BC} = 2\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$, dann ist das Verhältnis $\overline{BC} : \overline{AB} = 0.5$). Trage Deine Ergebnisse in die untenstehende Tabelle ein.
2. Berechne bei den oberen 6 Dreiecken die Werte der Verhältnisse $\overline{AC} : \overline{AB}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse wieder in die untenstehende Tabelle ein.
3. Berechne bei den oberen 6 Dreiecken die Werte der Verhältnisse $\overline{BC} : \overline{AC}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse wieder in die untenstehende Tabelle ein.

	15°	30°	45°	60°	75°	85°
$\overline{BC} : \overline{AB}$						
$\overline{AC} : \overline{AB}$						
$\overline{BC} : \overline{AC}$						

4. Trage Deine Ergebnisse nun in den untenstehenden Grafen ein. Wähle dabei für jedes Verhältnis eine andere Farbe.



5. Ändert sich etwas am Seitenverhältnis, wenn wir das Dreieck vergrössern, die Winkel aber gleich bleiben ?

6. Welche Werte können wir erhalten ? Gibt es einen maximalen und einen minimalen Wert ?

7. Wenn wir ein Verhältnis zu einem Winkel wissen, können wir dann das Verhältnis zum doppelten Winkel herausfinden ?

2 Die trigonometrischen Funktionen

2.1 Was sind trigonometrischen Funktionen ?

Die Werte der Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AC_4}} = \ldots$$

oder

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AB_4}}{\overline{B_4C_4}} = \ldots$$

sind von der Lage des Lotes $\overline{BC}$ unabhängig. Sie sind einzig und allein durch die Grösse des Winkels α bestimmt und ändern sich mit diesem.

Wir nennen diese Verhältniswerte **trigonometrische Funktionen**. Einem Winkel wird dabei ein Verhältnis zugeordnet. Da nicht nur jedem spitzen Winkel bestimmte Werte für die verschiedenen Verhältnisse zugeordnet sind, sondern umgekehrt auch zu jedem Verhältniswert stets nur ein einziger spitzer Winkel gehört, eignen sich diese Verhältnisse vorzüglich zur Messung bzw. Berechnung von Winkeln.

2.2 Die 6 trigonometrischen Funktionen

Bezeichnen wir die dem spitzen Winkel α eines rechtwinkligen Dreiecks ABC gegenüberliegende Kathete $\overline{BC} = a$ als Gegenkathete und $\overline{AC} = b$ als Ankathete, so ergeben sich 6 verschiedene Verhältniswerte, die folgendermassen benannt und definiert werden:

1. $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \dfrac{a}{c}$
2. $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \dfrac{b}{c}$
3. $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \dfrac{a}{b}$
4. $\cot(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \dfrac{b}{a}$
5. $\sec(\alpha) = \dfrac{\text{Hypothenuse}}{\text{Ankathete}} = \dfrac{a}{c}$
6. $\operatorname{cosec}(\alpha) = \dfrac{\text{Hypothenuse}}{\text{Gegenkathete}} = \dfrac{a}{c}$

Die beiden letztgenannten Funktionen werden selten gebraucht. Die $\sin, \cos$ und tan-Funktion finden wir auf dem Taschenrechner. Ist das Verhältnis bekannt, so können wir mit $sin^{-1}, \cos^{-1}$ oder $\tan^{-1}$ den dazugehörigen Winkel berechnen. Z.B. ist $\sin(30^\circ) = 0.5$ und $\sin^{-1}(0.5) = 30^\circ$.

Beispiel

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $a = 3\,\text{cm}$ und $\beta = 50^\circ$. Berechne die übrigen Seiten und Winkel.

Übungen

1. Berechne die gesuchten Werte.

   a) $\sin 31^\circ =$ [0.52] b) $\tan 27^\circ =$ [0.51]

   c) $\cos\alpha = 0.34; \alpha = ?$ [70.12°] d) $\tan\alpha = 2.5; \alpha = ?$ [68.20°]

2. Das Verhältnis bei einem rechtwinkligen Dreieck zwischen AK (bezogen auf α) und H beträgt 0.32. Wie gross ist der Winkel α ? [71.34°]

3. Wie hoch ist eine Tanne, wenn ihr Schatten $s = 27.5\,\text{m}$ lang ist und die Sonnenstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 38^\circ$ einfallen ? [21.49 m]

4. Berechne die fehlenden Winkel und Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn $b = 2.4\,\text{cm}$ und $\alpha = 67^\circ$ sind. [$a = 5.65\,\text{cm}, c = 6.14\,\text{cm}, \beta = 23^\circ$]

5. Aus einer Entfernung $e = 60\,\text{m}$ erblickt man die Spitze eines Turmes unter dem Höhenwinkel $\alpha = 27^\circ$. Wie hoch ist der Turm, wenn die Augenhöhe $a = 1.5\,\text{m}$ beträgt ? [32.07 m]

6. Welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm (ein Viereck mit je zwei parallelen Seiten) mit

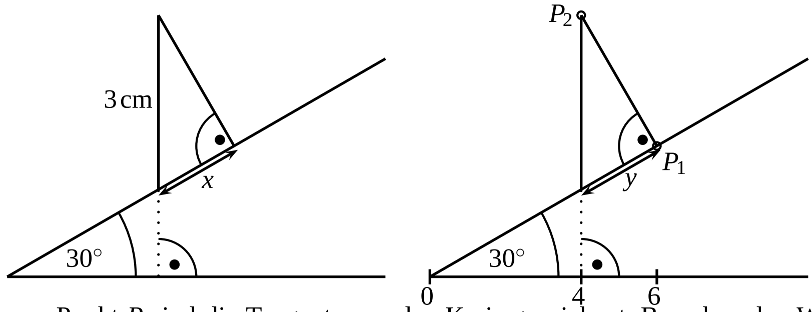
   a) $a = 8\,\text{cm}, d = 10\,\text{cm}, \alpha = 60^\circ$ [$A = 69.28\,\text{cm}^2$] b) $a = 12.0\,\text{m}, b = 7.5\,\text{m}, \beta = 125^\circ$ [$A = 73.72\,\text{m}^2$]

7. Von einem Schiff aus erscheint die Spitze eines Leuchtturms, der $h = 56\,\text{m}$ hoch ist, unter dem Höhenwinkel $\alpha = 5^\circ$. Wie weit ist das Schiff von dem Leuchtturm entfernt, wenn sich das Auge des Beobachters $a = 5.8\,\text{m}$ und der Fuss des Turmes $b = 7.5\,\text{m}$ über dem Meeresspiegel befinden ? [659.51 m]

8. Vom dritten Stock eines Hauses ($h = 11.2\,\text{m}$) erscheint das jenseitige Ufer eines Flusses unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 8^\circ$. Wie breit ist der Fluss, wenn das Haus vom diesseitigen Ufer $e = 3.5\,\text{m}$ entfernt ist ? [76.19 m]

9. Ein Kreis hat den Radius $r = 3.2\,\text{cm}$ und den Mittelpunktswinkel $\alpha = 112^\circ$. Berechne die Länge der dazugehörigen Sehne s. [$s = 5.3\,\text{cm}$]

10. Berechne die Länge der Strecke x auf der linken Abbildung bzw. y und die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 auf der rechten Abbildung. [$x = 1.5\,\text{cm}, y = 2.31, P_1(6|3.46), P_2(4|6.93)$]



11. Von einem Punkt P sind die Tangenten an den Kreis gezeichnet. Berechne den Winkel α, den die beiden Tangenten einschliessen ($r = 2.9\,\text{cm}, \overline{MP} = 4\,\text{cm}$). [92.94°]

12. Von einem Haus in einem Tal beobachtet man die Bergspitze B unter dem Höhenwinkel $\beta = 17^\circ$, die Bergspitze A unter dem Höhenwinkel $\alpha = 20^\circ$. Die Bergspitze A liegt 1376 m ü.M., Bergspitze B 1616 m ü.M. und das Haus 887 m ü.M, wobei die Spitzen auf der gleichen Seite des Hauses liegen. Das Haus, die Bergspitzen A und B bilden eine zur Erdoberfläche lotrechte Ebene. Berechne die Entfernung e von der Bergspitze A zur Bergspitze B. [1068.24 m]

13. Berechne den Winkel, den die Raumdiagonale eines Würfels mit einer Kante einschliesst. [54.74°]

14. Ein Quader hat die Kanten $a = 5\,\text{cm}, b = 4\,\text{cm}$ und $c = 3\,\text{cm}$. Berechne die Winkel α, β und γ, welche die Raumdiagonale des Quaders mit den Kanten a, b und c bildet.

2.3 Geometrische Veranschaulichung der trigonometrischen Funktionswerte

Die trigonometrischen Funktionswerte können wir am Einheitskreis darstellen (Einheitskreis: Kreis, dessen Radius 1 ist).

2.4 Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

Zwischen den trigonometrischen Funktionen lassen sich Zusammenhänge formulieren (Sätze).

Übung

13. Vereinfache folgende Terme.

a) $\tan\alpha \cdot \cos\alpha$

b) $\sin\alpha / \tan\alpha$

c) $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha$

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \tan^2\alpha$