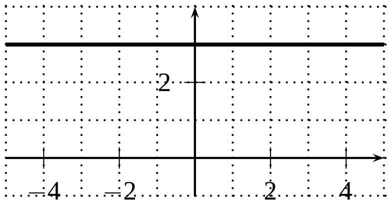
Lösungen lineare Funktionen

- Schnittpunkt gegeben bestimme Funktionsvorschrift.
- Flächeninhalt von eingeschlossenem Dreieck berechnen.
- Schnittwinkel gegeben, berechne Steigung.

1. Gegeben ist eine Funktion mit der Vorschrift $f(x) = 3$ (konstante Funktion).
   (a) Ist diese Funktion linear ? Wenn ja, dann bestimme die Variabeln a und b.
      - $\underline{\underline{\text{ja, } a = 0, b = 3}}$.

   (b) Zeichne den Funktionsgraphen von f !



2. Gib ein Beispiel einer Funktion an, die nicht linear ist.
   - Z.B. $\underline{\underline{f(x) = x^2}}$.

3. Die Punkte $A = (-6|?), B = (?|-6), C = (0|?)$ und $D = (?|0)$ liegen auf dem Graphen der linearen Funktion $f(x) = 3x + 2$. Berechne die fehlenden Koordinaten dieser Punkte.
   - $f(-6) = -16 \Rightarrow \underline{\underline{A = (-6|-16)}}$.
   - $-6 = 3x + 2 \Rightarrow x = -8/3 \Rightarrow \underline{\underline{B = (-8/3|-6)}}$.
   - $f(0) = 2 \Rightarrow \underline{\underline{C = (0|2)}}$.
   - $0 = 3x + 2 \Rightarrow x = -2/3 \Rightarrow \underline{\underline{D = (-2/3|0)}}$.

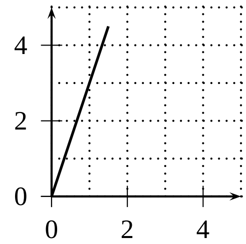
4. Für die lineare Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + b$ gilt $f(-6) = 0$. Berechne b und $f(10)$.
   - $0 = \frac{2}{3}(-6) + b \Rightarrow 0 = -4 + b \Rightarrow \underline{\underline{b = 4}}$.
   - $f(x) = \frac{2}{3}x + 4 \Rightarrow \underline{\underline{f(10)}} = 20/3 + 4 = 32/3 = \underline{\underline{10.67}}$

5. Für die lineare Funktion $f(x) = ax + 4$ gilt $f(5) = 9$. Berechne a und $f(-5)$.
   - $9 = 5a + 4 \Rightarrow \underline{\underline{a = 1}}$.
   - $f(x) = x + 4 \Rightarrow \underline{\underline{f(-5) = -1}}$.

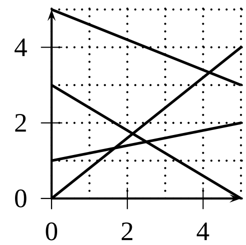
6. Gegeben ist die Vorschrift $f(x) = 2x + 1$. Berechne den Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse und mit der y-Achse.
   - Schnittpunkt mit x-Achse: $P_x = (x|0) \Rightarrow 0 = 2x + 1 \Rightarrow x = -0.5 \Rightarrow \underline{\underline{P_x = (-0.5|0)}}$.
   - Schnittpunkt mit y-Achse: $P_y = (0|y) \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_y = (0|1)}}$.

7. Zeichne eine Gerade mit der Steigung 3 !

   - 1 Häuschen nach rechts, 3 Häuschen nach oben:



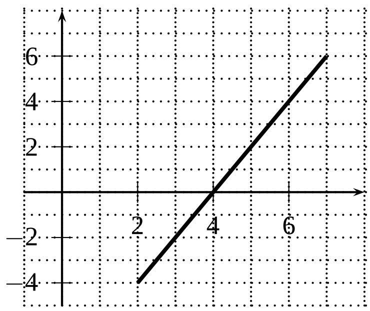
8. Bestimme die Steigung und den Winkel zur x-Achse und y-Achse bei den abgebildeten 4 Linien.



   - Gerade mit Anfangspunkt $(0|0)$:
     - Länge=5, Höhe=4 $\Rightarrow \underline{\underline{a_1}} = 4/5 = \underline{\underline{0.8}}$.
     - $\tan(\alpha_1) = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_1}} = \tan^{-1}(0.8) = \underline{\underline{38.66^\circ}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta_1}} = 90^\circ + 38.66^\circ = \underline{\underline{51.34^\circ}}$.
   - Gerade mit Anfangspunkt $(0|1)$:
     - Länge=5, Höhe=1 $\Rightarrow \underline{\underline{a_2}} = 1/5 = \underline{\underline{0.2}}$.
     - $\tan(\alpha_2) = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_2}} = \tan^{-1}(0.2) = \underline{\underline{11.31^\circ}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta_2}} = 90^\circ - 11.31^\circ = \underline{\underline{78.69^\circ}}$.
   - Gerade mit Anfangspunkt $(0|3)$:
     - Länge=5, Höhe=-3 $\Rightarrow \underline{\underline{a_3}} = -3/5 = \underline{\underline{-0.6}}$.
     - $\tan^{-1}(-0.6) = -30.96^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_3}} = 180^\circ - 30.96^\circ = \underline{\underline{149.04^\circ}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta_3}} = 149.04^\circ - 90^\circ = \underline{\underline{59.04^\circ}}$.
   - Gerade mit Anfangspunkt $(0|5)$:
     - Länge=5, Höhe=-2 $\Rightarrow \underline{\underline{a_4}} = -2/5 = \underline{\underline{-0.4}}$.
     - $\tan^{-1}(-0.4) = -21.80^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_4}} = 180^\circ - 21.80^\circ = \underline{\underline{158.2^\circ}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta_4}} = 158.2^\circ - 90^\circ = \underline{\underline{68.2^\circ}}$.

9. Gegeben ist eine Gerade mit der Steigung $a = 2$, die durch den Punkt $P = (3|-2)$ geht.

   (a) Zeichne den Funktionsgraphen !



(b) Berechne den Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse !

- Zuerst muss die Funktionsvorschrift berechnet werden.
- $f(x) = 2x + b$, dazu geht der Graph durch den Punkt $(3|-2) \Rightarrow -2 = 2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -8 \Rightarrow \underline{f(x) = 2x - 8}$.
- Schnittpunkt mit der x-Achse: $0 = 2x - 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_x = (4|0)}}$.

(c) Berechne den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse !

- $f(0) = 2 \cdot 0 - 8 = -8 \Rightarrow \underline{\underline{P_y = (0|-8)}}$.

(d) Wie lautet die Funktionsvorschrift ?

- $\underline{\underline{f(x) = 2x - 8}}$

(e) Gib einen weiteren Punkt an, der sich auf dem Funktionsgraphen befindet (nicht einer, der in dieser Aufgabe schon vorgekommen ist) !

- $f(1) = -6 \Rightarrow \underline{\underline{(1|-6)}}$.

10. Gegeben sind die drei Punkte $P_1 = (2|23.6)$, $P_2 = (10|50)$ und $P_3 = (50|182)$. Diese Punkte können wir nur schwer in ein Koordinatensystem eintragen !

(a)
- Ja, wir müssen einfach die Steigungen vergleichen zwischen den Punkten.
- Steigung zwischen P_1 und P_2: $a_1 = \dfrac{50 - 23.6}{10 - 2} = \underline{3.3}$.
- Steigung zwischen P_2 und P_3: $a_2 = \dfrac{182 - 50}{50 - 10} = \underline{3.3}$.
- Die Steigungen sind identisch, damit:
  <u>Alle drei Punkte liegen auf der gleichen Geraden</u>.

(b) Welche Vorschrift muss ich wählen, damit der Graph durch die drei Punkte geht ?

- $a = 3.3$, damit können wir schreiben: $\underline{f(x) = 3.3x + b}$.
- Punkt $P_1 = (2|23.6)$(z.B) einsetzen: $23.6 = 3.3 \cdot 2 + b \Rightarrow \underline{17 = b}$.
- $\underline{\underline{f(x) = 3.3x + 17}}$.

11. Die Gerade g geht durch die zwei Punkte $P_1 = (-3|-4)$ und $P_2 = (2|5)$.Berechne:

(a) Den Winkel α, welchen g mit der x-Achse bildet !

- Zuerst muss die Steigung zwischen P_1 und P_2 berechnet werden.
- $\underline{a} = \dfrac{5 - (-4)}{2 - (-3)} = \dfrac{9}{5} = \underline{1.8}$.
- $\underline{\underline{\alpha}} = tan^{-1}(1.8) = \underline{\underline{60.95^\circ}}$.

(b) Den Winkel β, welchen g mit der y-Achse bildet !

- $\underline{\beta} = 90^\circ - 60.95^\circ = \underline{\underline{29.05^\circ}}$

(c)
- $a = 1.8$, damit können wir schreiben: $\underline{f(x) = 1.8x + b}$.
- Punkt $P_1 = (-3|-4)$(z.B) einsetzen: $-4 = 1.8 \cdot (-3) + b \Rightarrow \underline{b = 1.4}$.
- $\underline{\underline{f(x) = 1.8x + 1.4}}$.

(d) Die Funktionsvorschrift g, deren Funktionsgraph parallel zu demjenigen von f ist, aber zwei Koordinateneinheiten weiter oben (Die Distanz zwischen den Geraden beträgt 2 Einheiten)!

- $cos(\alpha) = \frac{2}{h} \Longrightarrow h = 4.12 \Rightarrow y = 1.4 + 4.12 = 5.52$
  $\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = 1.8x + 5.52}}$

12. Gegeben sind zwei Funktionen f und g, mit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 2$ und $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = 4x + 4$.

(a) Die Funktionsgraphen von f und g haben genau einen Schnittpunkt S. Finde ihn !

- Gleichsetzen: $3x+2=4x+4 \Rightarrow -x=2 \Rightarrow \underline{x=-2}$.
- y-Wert berechnen: $\underline{y} = f(-2) = 3(-2)+2 = \underline{-4}$.
- $\underline{\underline{S=(-2|-4)}}$

(b) Zeichne die Graphen von f und g und überprüfe Dein Ergebnis aus a).

(c) Kannst Du zwei Funktionen f und g angeben, wo Du den Schnittpunkt der Funktionsgraphen direkt ablesen kannst ?

- z.B. $\underline{\underline{f(x)=2x+3, g(x)=3x+3}}$. Die hintere Zahl muss identisch sein, d.h. der Schnittpunkt mit der y-Achse ist identisch.

(d) Kannst Du zwei Funktionen f und g angeben, deren Funktionsgraphen keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben ?

- z.B. $\underline{\underline{f(x)=2x+3, g(x)=2x+4}}$. Die Steigungen müssen identisch sein, die Schnittpunkte mit der y-Achse müssen verschieden sein.

(e) Gibt es einen Fall, wo mehr als ein Schnittpunkt vorliegt ?

- Ja, wenn die Geraden übereinanderliegen, z.B.
$\underline{\underline{f(x)=2x+3, g(x)=2x+3}}$.

13. Zeichne eine beliebige Gerade und bestimme von ihr die Funktionsvorschrift !

- s. Übungen.

14. Ein Radfahrer fährt zur Zeit $t=0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit von 18km/h los. Ein Mofafahrer fährt 10min später mit einer konstanten Geschwindigkeit von 24km/h los.

(a) Nach welcher Zeitdauer (aus der Sicht des Velofahrers) treffen sie sich ?

- Radfahrer: $\underline{f(x)=18x}$ (x: Anzahl Stunden, $f(x)$: Geschwindigkeit in km/h).
- Mofafahrer:
  - $f(x)=24x+b$.
  - Der Mofafahrer hat bei $x=1/6$ (entspricht 10min) die Geschwindigkeit 0. Anders gesagt: Der Graph des Mofafahrers geht durch den Punkt $(1/6|0)$.
  - $0=24\cdot 1/6+b \Rightarrow 0=4+b \Rightarrow b=-4$.
  - $\underline{f(x)=24x-4}$
- Gleichsetzen: $18x=24x-4 \Rightarrow -6x=-4 \Rightarrow \underline{x=2/3}$.
- Aus Sicht des Radfahrers treffen sie sich nach $\underline{\underline{\text{40 min}}}$.

(b) s. Übungen.

15. In der Physik gilt das Gesetz: $v(t)=v_0+at$. Begründe nun folgende Aussage:
Wenn der Graph eines v-t-Diagramms parallal zur x-Achse ist, dann ist die Beschleunigung 0.

- Die Zahl vor der Variablen t entspricht der Beschleunigung.
- Wenn der Graph parallel zur x-Achse ist, ist die Steigung 0.
- Damit ist dann die Beschleunigung 0.

16. -17.8 Grad Celsius entsprechen 0 Grad Fahrenheit und 37.8 Grad Celsius entsprechen 100 Grad Fahrenheit.

(a) In der obigen Situation liegt eine Zuordnung vor. Wir ordnen x Grad Celsius y Grad Fahrenheit zu. Diese Zuordnung können wir mit einer linearen Funktionsvorschrift beschreiben (Dass sie linear ist, können wir nicht selber herausfinden, das ist gegeben). Finde diese Vorschrift.

- Steigung berechnen: $a = \dfrac{100-0}{37.8-(-17.8)} = \dfrac{100}{55.6} = 1.8$.

- Wir können schreiben: $f(x) = 1.8x + b$.
- Den Punkt $(-17.8|0)$ einsetzen: $0 = 1.8(-17.8) + b \Rightarrow \underline{b = 32.04}$.
- $\underline{\underline{f(x) = 1.8x + 32.04}}$

(b) Wieviel Grad Fahrenheit entsprechen 100 Grad Celsius ? Wieviel Grad Celsius entsprechen 70 Grad Fahrenheit ?

[$100°C \hat{=} 211.96°F, 70°F \hat{=} 21.13°C$]

- $f(100) = 1.8 \cdot 100 + 32.04 = 212.04 \Rightarrow \underline{\underline{100°\text{C entsprechen } 212.04°\text{F}}}$
- $70 = 1.8x + 32.04 \Rightarrow x = 21.09 \Rightarrow \underline{\underline{70°\text{F entsprechen } 21.09°\text{C}}}$

(c) Bei wieviel Grad Fahrenheit liegt der Gefrierpunkt von Wasser (0° Celsius)?

- $f(0) = 1.8 \cdot 0 + 32.04 = 32.04 \Rightarrow \underline{\underline{0°\text{C entsprechen } 32.04°\text{F}}}$.

(d) Stelle eine Funktion g auf, die Temperaturen von Grad Fahrenheit in Grad Celsius umrechnet.

- Umkehrfunktion berechnen.
- $f(x) = 1.8x + 32.04 \Rightarrow y = 1.8x + 32.04$.
- $1.8x = y - 32.04 \Rightarrow x = \dfrac{y - 32.04}{1.8} \Rightarrow \underline{\underline{g(y) = \dfrac{y - 32.04}{1.8}}}$.

17. Eine Schraubenfeder in in unbelastetem Zustand 8cm, bei einer Belastung mit 5N 11cm lang. Die Zuordnung Kraft x $\mapsto$ Dehnung y ist dabei linear.

a)
- Steigung berechnen: $a = \dfrac{11 - 8}{5 - 0} = \dfrac{3}{5} = 0.6$.
- Wir können schreiben: $f(x) = 0.6x + b$.
- Den Punkt $(5|11)$ einsetzen: $11 = 0.6 \cdot 5 + b \Rightarrow \underline{b = 8}$.
- $\underline{\underline{f(x) = 0.6x + 8}}$

b) Berechne die Federlänge für 4N.

- $f(4) = 0.6 \cdot 4 + 8 = 10.4 \Rightarrow \underline{\underline{10.4\text{cm}}}$

18. Eine 80cm hohe zylinderförmige Regentonne wird bei gleichmässigem Zulauf mit Wasser gefüllt. Nach 3 Minuten steht das Wasser 25cm hoch, nach weiteren 2 Minuten steht es 33cm hoch. Wie lange dauert es, bis die Tonne voll ist ?

- – Steigung berechnen: $a = \dfrac{33 - 25}{5 - 3} = \dfrac{8}{2} = 4$.
  – Wir können schreiben: $f(x) = 4x + b$.
  – Den Punkt $(3|25)$ einsetzen: $25 = 4 \cdot 3 + b \Rightarrow \underline{b = 13}$.
  – $\underline{f(x) = 4x + 13}$
  – $80 = 4x + 13 \Rightarrow 4x = 67 \Rightarrow 16.75 \Rightarrow \underline{\underline{\text{nach } 16.75 \text{ Minuten}}}$

19. Gegeben sind die zwei linearen Funktionen $f_1(x) = 3x + 5$ und $f_2(x) = 2x - 4$. Berechne den Schnittpunkt und die beiden Schnittwinkel der Graphen dieser beiden Funktionen. [$(-9|-22), 8.13°, 171.87°$]

- Gleichsetzen: $3x + 5 = 2x - 4 \Rightarrow x = -9$
- y-Wert berechnen: $f_1(-9) = 3(-9) + 5 = -22$
- $\underline{\underline{S = (-9|-22)}}$.

20. Die Gerade g_1 geht durch die Punkte $P_1 = (1 \mid 1)$ und $P_2 = (3 \mid 5)$. Die Gerade g_2 geht durch die Punkte $P_1 = (0 \mid 5)$ und $P_2 = (4 \mid 1)$. <u>Berechne</u> den Schnittpunkt der beiden Geraden und prüfe danach zeichnerisch nach.

- Gerade g_1: $f_1(x) = ax + b$. Ziel ist es, die Parameter a und b herauszufinden.

- $a_1 = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$
- Wir können damit schreiben: $f_1(x) = 2x + b$.
- Den Punkt P_1 in die Gleichung einsetzen:
  - $y = 2x + b$
  - $1 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$
- Wir können schreiben: $\underline{f_1(x) = 2x - 1}$.
- Gerade g_2: $f_2(x) = ax + b$. Ziel ist es, die Parameter a und b herauszufinden.
- $a_2 = \frac{1-5}{4-0} = \frac{-4}{4} = -1.$
- Wir können damit schreiben: $f_2(x) = -x + b$.
- Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist durch den Punkt $(0|5)$ gegeben. Damit ist $b = 5$.
- Wir können schreiben: $\underline{f_2(x) = -x + 5}$.
- Um den x-Wert des Schnittpunktes zu ermitteln, müssen wir gleichsetzen: $2x - 1 = -x + 5 \Rightarrow x = 2$.
- Um den y-Wert zu ermitteln, müssen wir einsetzen: $f_1(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.
- Zur Kontrolle können wir noch in die andere Vorschrift einsetzen: $f_2(2) = -2 + 5 = 3$,ok.
- Der Schnittpunkt beträgt damit: $\underline{\underline{S = (2|3)}}$

21. Berechne den Schnittwinkel der beiden Geraden.
    - $\alpha = \tan^{-1}(2) = 63.43°$.
    - $\beta = \tan^{-1}(-1) = -45°$.
    - $\underline{\underline{\gamma}} = 63.43° + 45° = \underline{\underline{108.43°}}$

22. Gegeben ist eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$. Berechne den Winkel des Graphen mit der x-Achse !
    - $\alpha = \tan^{-1}(a)$. Bei negativer Steigung erhalten wir hier den negativen Schnittwinkel.

23. Gegeben sind die zwei linearen Funktionen $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d$. Leite eine Formel für den Schnittwinkel her !
    - Es ist die Differenz zwischen dem grösseren Winkel und dem kleineren Winkel zu berechnen.
    - 1.Fall: $a > c \Rightarrow \tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(c)$
    - 2.Fall: $a < c \Rightarrow \tan^{-1}(c) - \tan^{-1}(a)$
    - Beide Fälle können elegant in eine Formel verpackt werden:
    $$|\tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(c)|$$

24. *Gegeben sind die zwei linearen Funktionen $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d$. Leite eine Formel für den Schnittpunkt her !
    - Gleichsetzen: $ax + b = cx + d$.
    - $ax - cx = d - b \Rightarrow x(a - c) = d - b \Rightarrow \underline{x = \frac{d-b}{a-c}}$.
    - Einsetzen, um y zu berechnen:
    $$\begin{aligned} \underline{y} &= f\left(\frac{d-b}{a-c}\right) = a\frac{d-b}{a-c} + b = \frac{a(d-b)}{a-c} + \frac{b(a-c)}{a-c} \\ &= \frac{ad-ab}{a-c} + \frac{ba-bc}{a-c} = \frac{ad-ab+ba-bc}{a-c} = \underline{\frac{ad-bc}{a-c}}. \end{aligned}$$

- Die Koordinaten des Schnittpunktes lauten: $\underline{\underline{\left(\frac{d-b}{a-c} \mid \frac{ad-bc}{a-c}\right)}}$.