1.2 Mengenlehre I-Einführung in die reellen Zahlen

Inhaltsverzeichnis

Mengenlehre 1-Einführung in die reellen Zahlen

1 Checkliste

- Ich weiss, was eine irrationale Zahl ist.
- Ich kann irrationale Zahlen konstruieren.
- Ich kenne Beispiele von irrationalen Zahlen (ohne Konstruktion).
- Ich kenne die Menge der reellen Zahlen.

2 Repetition

Die **natürlichen Zahlen** kennen wir bestens von der Primarschule her:

Die ganzen Zahlen bestehen aus den natürlichen Zahlen, der Null und den natürlichen Zahlen mit dem Vorzeichen -:

Die Menge der rationalen Zahlen ist die („Menge aller Brüche “). Wir können sie folgendermassen notieren:

Die natürlichen und die ganzen Zahlen sind in den rationalen Zahlen enthalten, z.B. $3 = \frac{3}{1}$ und $-3 = \frac{-3}{1}$
Diese Zahlenmengen können wir auch graphisch darstellen:

Ein Satz der Mathematik sagt aus, dass für zwei beliebige rationale Zahlen q_1 und q_2 mit $q_1 < q_2$ eine rationale Zahl q_3 so existiert, dass gilt: $q_1 < q_3 < q_2$. Das heisst, dass zwischen zwei rationalen Zahlen, auch wenn sie noch so nahe beisammen sind, immer eine weitere dazwischenpasst.

Übungen

1. Wie gross sind z und n bei den folgenden Brüchen (s.oben) ?

   a) $\frac{3}{7}$ b) $-\frac{5}{2}$

   c) $2\frac{1}{3}$ d) 5

2. Gib eine rationale Zahl an, die zwischen den zwei gegebenen Zahlen liegt.

   a) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$

3 Dezimalzahlen

Dezimalzahlen kennen wir bereits. Beispiele dafür sind 2.234, 0.51 oder $3.\overline{2}$.

Wir definieren sie folgendermassen:

Definition 1 *Eine **Dezimalzahl** hat folgende Form:*

Wir unterscheiden 3 Sorten von Dezimalzahlen

1. abbrechende Dezimalzahlen: Sie haben nur eine endliche Anzahl Dezimalstellen (z.B. 3.43, 0.121)
2. periodische Dezimalzahlen: Eine bestimmte Ziffernfolge wiederholt sich ab einer bestimmten Stelle (z.B. $3.\overline{34}$, $0.1\overline{721}$).
3. Alle Dezimalzahlen, die weder abbrechend noch periodisch sind.

4 Die Darstellung von Brüchen als Dezimalzahlen

In der Primarschule haben wir die schriftliche Division geübt. Wir benötigen sie, um den nächsten Satz zu verstehen. Wir lösen zur Repetition 3 Aufgaben dazu:

3. Löse mit der schriftlichen Division.

   a) 33:5 = b) 56:9 = c) 1:7 =

Wir beobachten:

Unsere Beobachtung halten wir in einem Satz fest:

Satz 1

5 irrationale Zahlen

Frage: Wenn wir alle Brüche auf der Zahlenachse markieren, gibt es dann noch Lücken ?

Antwort:

Diese Zahlen, die nicht getroffen werden, heissen **irrationale** Zahlen.

Definition 2

Übung

4. Gib 3 irrationale Zahlen an.

6 Beispiele von irrationalen Zahlen, die nicht konstruiert werden

Irrationalen Zahlen sind wir schon begegnet, einerseits bei der Kreisberechnung, andererseits beim Wurzelziehen.
Ein paar Beispiele:

- $\sqrt{2}$ ist irrational.
- $\sqrt{3}$ ist irrational.
- $\sqrt{5}$ ist irrational.
- Die Wurzel einer natürlichen Zahl, die keine Quadratzahl ist, ist irrational (Quadratzahlen: 1,4,9,...).

Euklid hat bereits in der Antike bewiesen, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Der Beweis wird an der Prüfung nicht verlangt, für Interessierte ist er aufgeführt.

Bei der Kreisberechung sind wir der Zahl π begegnet, die ebenfalls irrational ist. Der Nachweis dafür ist allerdings viel schwieriger zu erbringen.

6.1 Zusatz: Der Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist

Wenn wir $\sqrt{2}$ in den Taschenrechner eintippen erhalten wir das Ergebnis: 1,41421356... Sie scheint unendlich viele Stellen zu haben, dazu scheint keine Periodizität vorhanden zu sein. Wir können aber nicht sicher sein. Vielleicht hat die Zahl 100 Mio Stellen und bricht danach ab. Vielleicht wiederholt sie sich immer nach 10000 Stellen. Den Beweis, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, hat Euklid gefunden:

1. Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremd sind
2. Quadrieren: $2 = \frac{p^2}{q^2}$
3. Mit q^2 multiplizieren: $2q^2 = p^2 \Longrightarrow p^2$ ist eine gerade Zahl $\Longrightarrow p$ ist eine gerade Zahl.
4. Weil p gerade ist, kann man schreiben: $p = 2r$
5. Aus Schritt 3 wissen wir: $2q^2 = p^2 \Longrightarrow 2q^2 = (2r)^2 = 4r^2 \Longrightarrow$ (durch 2 teilen) $q^2 = 2r^2 \Longrightarrow q^2$ ist gerade $\Longrightarrow q$ ist gerade.
6. Beim ersten Schritt haben wir geschrieben: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p, q teilerfremd sind. Wir haben aber herausgefunden, dass p und q gerade sind, also nicht teilerfremd sein können. Wir haben nun einen Widerspruch. Die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, ist falsch. Damit folgt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Zur Beweismethode:

Wir wollen wissen, ob Peter im Kino war. Es gibt zwei Fälle: 1. Er war im Kino, 2. Er war nicht im Kino. Wir nehmen nun den 1.Fall an, wir glauben, dass Peter im Kino war. Durch Nachfragen erfahren wir, dass unsere Annahme falsch war. Daraus schliessen wir, dass Peter nicht im Kino war.

Bei unserem Beweis gibt es zwei Möglichkeiten: 1. $\sqrt{2}$ ist rational oder 2. $\sqrt{2}$ ist irrational. Wir haben angenommen, dass $\sqrt{2}$ rational ist und danach herausgefunden, dass dies nicht sein kann. Es bleibt nur noch Möglichkeit 2, nämlich dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

7 Die Menge der reellen Zahlen

Definition 3

Bemerkung: Graphisch sind die reellen Zahlen alle Punkte auf dem Zahlenstrahl.

Mit Mengendiagrammen können wir die reellen Zahlen folgendermassen darstellen:

Übungen

5. Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr sind !
   a) -2,5 ist eine ganze Zahl
   b) -1 ist eine natürliche Zahl
   c) $0{,}2\overline{56}$ ist eine rationale Zahl
   d) $2{,}23\overline{3}$ ist eine irrationale Zahl
   e) $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl
6. Sind die folgenden Zahlen rational oder irrational (Die Stellen nach dem Komma gehen mit dem gleichen Schema weiter) ?
   a) 3,245246244
   b) 0,123124123124.....

c) 3,213214215216..... (nach der 9 kommt die 0)

d) 4,10100100010000100000.....

e) $\pi/4$

7. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = 2$

   a) in $\mathbf{Q}$ b) in $\mathbf{R}$

8. Markiere auf dem Zahlenstrahl eine irrationale Stelle.

9. Kann das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises (U:d) exakt mit einer Dezimalzahl angegeben werden.