

Lösungen Gleichungen I

1. Löse die folgenden Gleichungen in der gegebenen Grundmenge (\mathbf{N} =natürliche Zahlen, \mathbf{Z} =ganze Zahlen, \mathbf{Q} =rationale Zahlen) ohne TR.

a) $3x = 5, \mathbf{G} = \mathbf{N} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\}}}$ b) $3x = 5, \mathbf{G} = \mathbf{Z} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\}}}$
 c) $3x = 5, \mathbf{G} = \mathbf{Q} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{5/3\}}}$ d) $3x = -6, \mathbf{G} = \mathbf{N} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\}}}$
 e) $3x = -6, \mathbf{G} = \mathbf{Z} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{-2\}}}$ f) $3x = -6, \mathbf{G} = \mathbf{Q} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{-2\}}}$

2. Notiere eine Gleichung, die in \mathbf{Z} , aber nicht in \mathbf{N} eine Lösung hat.

• z.B. $\underline{\underline{3x = -9}}$

3. Löse die folgenden Gleichungen in \mathbf{Q} ohne TR.

a) $x + 10 = 16 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{6\}}}$ b) $x - 28 = 12 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{40\}}}$ c) $13 = x + 13 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{0\}}}$
 d) $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{1/4\}}}$
 e) $7\frac{1}{3} = 11 + x \Rightarrow x = 7\frac{1}{3} - 11 \Rightarrow x = \frac{22}{3} - \frac{33}{3} = -\frac{11}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{-\frac{11}{3}\}}}$
 f) $7 = \frac{1}{3}x \Rightarrow x = 21 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{21\}}}$
 g) $-11 = 0.11x \Rightarrow -11 = \frac{11}{100}x \Rightarrow -1100 = 11x \Rightarrow x = -100 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{-100\}}}$
 h) $0x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\mathbf{Q}\}}}$
 i) $0x = 17 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\}}}$

4. Notiere eine Gleichung, welche in \mathbf{Q} die Lösung $-3/7$ hat.

• z.B. $\underline{\underline{7x = -3}}$

5. Löse die folgenden Gleichungen in \mathbf{Q} .

a) $14x - 6 + 5x + 15 = 3x + 22 + 13x - 7$
 • $19x + 9 = 16x + 15 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{2\}}}$
 b) $3x + 30 - (x + 28) = 3x - (2x + 4)$
 • $3x + 30 - (x + 28) = 3x - (2x + 4) \Rightarrow 3x + 30 - x - 28 = 3x - 2x - 4 \Rightarrow 2x + 2 = x - 4 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{-6\}}}$
 c) $9x - [4x - (4 + x)] = 4x + 8 \Rightarrow 9x - [4x - 4 - x] = 4x + 8 \Rightarrow 9x - 4x + 4 + x = 4x + 8 \Rightarrow 6x + 4 = 4x + 8 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{2\}}}$

6. Löse die folgenden Gleichungen in \mathbf{Q} .

a) $12(x - 1) = 64 - 14(x - 2)$
 • $12x - 12 = 64 - 14x + 28$
 • $26x = 104 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{4\}}}$
 b) $9(3x - 11) = 6(9x - 4)$
 • $27x - 99 = 54x - 24 \Rightarrow -27x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{-27} = \frac{25}{-9} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{25/9\}}}$
 c) $2[3x + 2(3x - 2)] = 4(4x - 1)$

- $2[3x + 6x - 4] = 16x - 4$
 - $2[9x - 4] = 16x - 4$
 - $18x - 8 = 16x - 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{2\}}}$
- d) $(5 + 4b)(3x - 6) = (6x - 7)(2b + 10)$
- $15x - 30 + 12bx - 24b = 12bx + 60x - 14b - 70$
 - $15x - 30 - 24b = 60x - 14b - 70$
 - $-45x = 10b - 40 \Rightarrow x = -\frac{10b - 40}{45} = -\frac{5(2b - 8)}{45} = -\frac{2b - 8}{9} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{-(2b - 8)/9\}}}$
- e) $5[3 - (8x + 1)(6 - 3a)] = 3[40ax - 3(5x - a)] \Rightarrow 5[3 - 48x + 24ax - 6 + 3a] = 3[40ax - 15x + 3a] \Rightarrow 15 - 240x + 120ax - 30 + 15a = 120ax - 45x + 9a \Rightarrow -240x + 15a - 15 = -45x + 9a \Rightarrow -195x = -6a + 15 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \frac{-6a + 15}{-195} = \frac{-2a + 5}{-65} = \frac{-(2a - 5)}{-65} = \underline{\underline{\frac{2a - 5}{65}}}$
- f) $\frac{8}{3} \left(6x - \frac{9}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(8x + \frac{1}{3}\right) = 4x - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \left(10x - \frac{5}{8}\right) + 3\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{48x}{3} - \frac{72}{6} - \frac{24x}{2} - \frac{3}{6} = 4x - \frac{1}{2} - \frac{40x}{5} + \frac{20}{40} + 3.5 \Rightarrow 16x - 12 - 12x - \frac{1}{2} = 4x - \frac{1}{2} - 8x + \frac{1}{2} + 3.5 \Rightarrow 4x - 12.5 = -4x + 3.5 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{2\}}}$

7. Löse die folgenden Gleichungen in \mathbf{Q} .

- a) $(x - 5)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x - 10)^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 20x + 100 \Rightarrow -10x + 25 + 4x + 4 = 6x + 9 - 20x + 100 \Rightarrow -6x + 29 = -14x + 109 \Rightarrow 8x = 80 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{10\}}}$
- b) $(4x + 1)^2 - (4x)^2 - (x - 1)^2 + (x - 10)^2 = 0 \Rightarrow 16x^2 + 8x + 1 - 16x^2 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 20x + 100 = 0 \Rightarrow -10x + 100 = 0 \Rightarrow -10x = -100 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L} = \{10\}}}$

8. Wenn man das Vierfache einer bestimmten Zahl um eins vermindert, erhält man das Fünffache der um 4 verminderten Zahl. Wie heisst die Zahl ?

- x : gesuchte Zahl
- $4x - 1 = 5(x - 4) \Rightarrow \underline{\underline{x = 19}}$

9. Vater und Tochter haben einen Altersunterschied von 28 Jahren. Nach 16 Jahren wird der Vater gerade doppelt so alt sein wie die Tochter. Wie alt sind die beiden heute ?

- x : Alter Tochter, $x + 28$: Alter Vater.
- $2(x + 16) = x + 44 \Rightarrow \underline{\underline{x = 12}}$

10. Eine Treppe hat 16 Stufen. Würde man jede Stufe um 2.5 cm höher machen, könnte man zwei Stufen einsparen. Wie hoch ist eine Stufe, wie hoch die ganze Treppe ?

- x : Höhe Stufe in cm
- $16x = 14(x + 2.5) \Rightarrow \underline{\underline{x = 17.5}}$
- Höhe der Treppe: $\underline{\underline{h_T}} = 16 \cdot 17.5 \text{ cm} = \underline{\underline{280 \text{ cm}}}$

11. Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 385. Welches ist die kleinste dieser Zahlen ?

- x : Kleinste der 5 Zahlen
- $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 5x + 10 = 385 \Rightarrow \underline{\underline{x = 75}}$

12. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist 740. Welches ist die grösste dieser 4 Zahlen ?

- x : Grösste der 4 Zahlen
 - $x + x + 2 + x + 4 + x + 6 = 4x + 12 = 740 \Rightarrow \underline{\underline{x = 188}}$
13. In einem Viereck ist der Winkel Beta um 10° grösser als Alpha. Gamma übertrifft Beta um 20° und ist selber um 30° kleiner als Delta. Wie gross sind diese vier Winkel ?
- x : Alpha
 - $x + x + 10 + x + 30 + x + 60 = 4x + 100^\circ = 360^\circ \Rightarrow \underline{\underline{x = 65^\circ}}$
 - $65^\circ, 75^\circ, 95^\circ$ und 125°
14. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Vertauscht man ihre Ziffern, wird sie um 18 grösser. Wie heisst die ursprüngliche Zahl ?
- x : erste Ziffer (Zehnerziffer), $12 - x$: zweite Ziffer
 - $10x + 12 - x + 18 = 10(12 - x) + x \Rightarrow \underline{\underline{x = 5}} \Rightarrow \underline{\underline{57}}$
15. Die Summe des Zählers und des Nenners eines ungekürzten Bruches beträgt 120. Nach vollständigem Kürzen erhalten wir den Bruch $7/8$. Welchen Bruch hatten wir ursprünglich ?
- x : Zähler, $120 - x$: Nenner
 - $\frac{x}{120 - x} = \frac{7}{8} \Rightarrow x = 56 \Rightarrow$ Ursprünglich hatten wir $\frac{56}{64}$.
16. Wenn ich eine Zahl mit 25 multipliziere, vom Produkt 700 subtrahiere und die Differenz durch 7 dividiere, so erhalte ich dasselbe, wie wenn ich vom Vierfachen der Zahl die Hälfte der Zahl subtrahiere und zur Differenz 42 addiere.
- x : gesuchte Zahl
 - $\frac{25x - 700}{7} = 4x - \frac{x}{2} + 42 \Rightarrow \underline{\underline{x = 1988}}$
17. Vergrössert man bei einem Würfel die Kantenlänge um 5 cm, so wächst seine Oberfläche um 990 cm^2 . Welches ist die ursprüngliche Länge einer Kante ?
- x : Ursprüngliche Länge der Kante
 - $6x^2 = 6(x + 5)^2 - 990 \Rightarrow \underline{\underline{x = 14}}$
18. In einem Gehege werden Kaninchen und Hühner gehalten. Sie haben zusammen 35 Köpfe und 94 Beine. Wieviele Tiere von jeder Art sind im Gehege ?
- x : Anzahl Kaninchen, $35 - x$: Anzahl Hühner
 - $4x + (35 - x)2 = 94 \Rightarrow \underline{\underline{x = 12}}$
19. Zwei Zahlen unterscheiden sich um 4, ihre Quadrate um 480. Welches ist die grössere der beiden Zahlen ?
- x : grössere Zahl, $x - 4$: kleinere Zahl.
 - $x^2 = (x - 4)^2 + 480 \Rightarrow \underline{\underline{x = 62}}$
20. Jemand möchte eine Badewanne mit 220 Litern Wasser füllen. Es stehen ihm heisses Boilerwasser (62°) und kaltes Leitungswasser (7°) zur Verfügung. Wieviele Liter vom heissen und vom kalten Wasser muss er nehmen, damit das Badewasser eine Temperatur von 36° aufweist ?
- x : Anzahl Liter heisses Wasser, $220 - x$: Anzahl Liter kaltes Wasser.
 - $62x + 7(220 - x) = 220 \cdot 36 \Rightarrow x = 116 \Rightarrow \underline{\underline{116 \text{ l heisses Wasser, } 104 \text{ l kaltes Wasser}}}$

21. Drei Kapitalien von 4000 Fr., 5500 Fr. und 8500 Fr. ergeben einen Jahreszins von zusammen 740 Fr. Der Zinssatz für das 2.Kapital ist ein halbes Prozent höher als derjenige für das 1.Kapital, und der Zinssatz für das 3.Kapital ist um ein ganzes Prozent höher als für das 2.Kapital. Welches sind die 3 Zinssätze ?

- x : Zinssatz 1.Kapital in %, $x + 0.5$: Zinssatz 2.Kapital in %, $x + 1.5$: Zinssatz 3.Kapital in %
- $\frac{4000 \cdot x}{100} + \frac{5500 \cdot (x + 0.5)}{100} + \frac{8500 \cdot (x + 1.5)}{100} = 740 \Rightarrow x = 3.25$
- 1.Kapital: 3.25%, 2.Kapital: 3.75%, 3.Kapital: 4.75%.

22. Löse die folgenden Gleichungen nach x auf.

a) $bx + cx = mb + mc \Rightarrow x(b + c) = mb + mc \Rightarrow \underline{x} = \frac{mb + mc}{b + c} = \frac{m(b + c)}{b + c} = \underline{m}$

b) $ay + bx = a - cx \Rightarrow bx + cx = a - ay \Rightarrow x(b + c) = a - ay \Rightarrow x = \frac{a - ay}{b + c}$

c) $4(ax - b) = 2(ax + 2a - bx) \Rightarrow 4ax - 4b = 2ax + 4a - 2bx \Rightarrow 2ax + 2bx = 4a + 4b \Rightarrow x(2a + 2b) = 4a + 4b \Rightarrow \underline{x} = \frac{4a + 4b}{2a + 2b} = \frac{4(a + b)}{2(a + b)} = \underline{2}$

d) $(x - 4a)^2 - x(x + b) = b(7x + 16b) \Rightarrow x^2 - 8ax + 16a^2 - x^2 - bx = 7bx + 16b^2 \Rightarrow -8ax - bx - 7bx = 16b^2 - 16a^2 \Rightarrow -8ax - 8bx = 16b^2 - 16a^2 \Rightarrow x(-8a - 8b) = 16b^2 - 16a^2 \Rightarrow \underline{x} = \frac{16b^2 - 16a^2}{-8a - 8b} = \frac{16(b^2 - a^2)}{-8(a + b)} = \frac{16(b + a)(b - a)}{-8(a + b)} = \underline{\underline{-2(b - a)}}$

e) gestrichen

f) gestrichen

23. Löse jeweils nach der angegebenen Variable auf.

a) $y = ax + b$, nach x ; $y = ax + b \Rightarrow y - b = ax \Rightarrow \underline{x} = \frac{y - b}{a}$

b) $m_1c_1(t - t_1) = m_2c_2(t_2 - t)$, nach t ;
 $m_1c_1(t - t_1) = m_2c_2(t_2 - t) \Rightarrow m_1c_1t - m_1c_1t_1 = m_2c_2t_2 - m_2c_2t$
 $\Rightarrow m_1c_1t + m_2c_2t = m_2c_2t_2 + m_1c_1t_1 \Rightarrow t(m_1c_1 + m_2c_2) = m_2c_2t_2 + m_1c_1t_1 \Rightarrow t = \frac{m_2c_2t_2 + m_1c_1t_1}{m_1c_1 + m_2c_2}$

c) $l = l_0(1 + \alpha\Delta t)$, nach α ; $l = l_0(1 + \alpha\Delta t) \Rightarrow l = l_0 + l_0\alpha\Delta t \Rightarrow l - l_0 = l_0\alpha\Delta t \Rightarrow \underline{\alpha} = \frac{l - l_0}{l_0\Delta t}$

d) $a_n - a_1 = d(n - 1)$, nach n ;
 $a_n - a_1 = d(n - 1) \Rightarrow a_n - a_1 = dn - d \Rightarrow a_n - a_1 + d = dn \Rightarrow \underline{n} = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$