Lösungen zur Abschlussprüfung Mathematik

1. (5.5 P./12 min)

   a) (3 P./6 min/gemacht/Leicht) Forme so um, dass das Ergebnis die Form a^b hat.

      i) (0.5 P.) $x^{-4} \cdot x^{-1} \cdot x = x^{-4}$

      ii) (0.5 P.) $x^{-2} : x^{-1} = x^{-1}$

      iii) (1 P.) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$

      iv) (1 P.) $\sqrt[4]{x^3} : \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{12}}$

   b) (2.5 P./6 min/gemacht/mittel) Löse die folgende Gleichung nach x auf:

$$a = \frac{x-b}{1+bx}$$

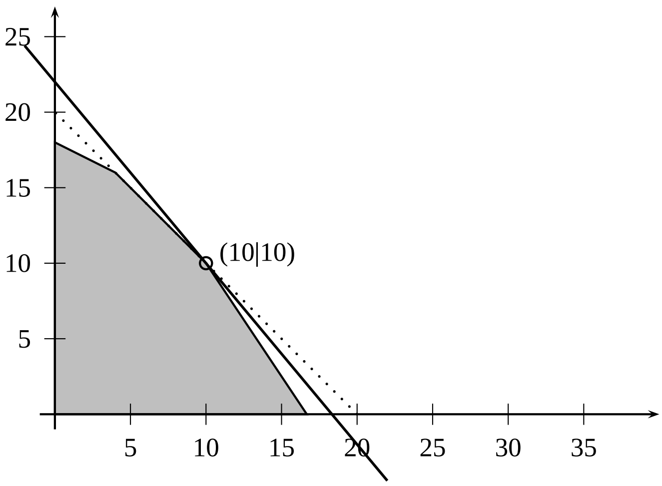
      - $a(1+bx) = x-b$
      - $a+abx = x-b$
      - $abx-x = -a-b$
      - $x(ab-1) = -a-b$
      - $x = \frac{-a-b}{ab-1}$

2. (5.5 P./16 min) Ein Kleinunternehmer, der allein arbeitet, stellt Gemüsereiben und Kartoffelschäler her. Die untenstehenden Ungleichungen stellen dabei die Rahmenbedingungen dar.

   - x : Gemüsereiben, y : Kartoffelschäler
   - $10x+20y \leq 360$
     $3x+2y \leq 50$
     $x+y \leq 20$

   a) (3 P./9 min/gemacht/leicht) Zeichne das entsprechende Planungspolygon.

      - Es werden je zwei Punkte ausgerechnet
        – Gl.1: (0|18), (36|0)
        – Gl.2: (0|25), $(16.\overline{6}|0)$
        – Gl.3: (0|20), (20|0)



   b) (1.5 P./4 min/gemacht/leicht) Der Gewinn für eine Reibe beträgt 6 Fr, für einen Kartoffelschäler beträgt er 5 Fr. Welches ist der höchstmögliche Gewinn, der erzielt werden kann ?

      - Gewinn: $6x+5y = G \Rightarrow y = -\frac{6}{5}x + \frac{G}{6}$ (durchgezogene Linie)

   c) (1 P./3 min/gemacht/leicht) Wieviele Geräte können maximal verkauft werden ?

- Gewinn: $x+y=A \Rightarrow y=-x+A$ (gestrichelte Linie)
- Maximal 20 Geräte

3. (5 P./14 min)

   a) (2 P./5 min/gemacht/leicht) Löse die folgenden Gleichungen 2.Grades mit Faktorisieren oder Wurzelziehen. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L}=\{\ldots\}$ an.

   i) (1 P.) $x^2-11x-12=0 \Rightarrow (x-12)(x+1)=0 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L}=\{-1,12\}}}$

   ii) (1 P.) $(x-1)^2=25 \Rightarrow x_{1,2}-1=\pm 5 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L}=\{-4,6\}}}$

   b) (1 P./3 min/gemacht/leicht) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $x(x-3)(x+4)=0$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L}=\{\ldots\}$ an.

   - $\underline{\underline{\mathbf{L} = \{-4,0,3\}}}$

   c) ((2 P./6 min/neu/mittel) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $(x^2-3x-4)(x^2+x-2)=0$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L}=\{\ldots\}$ an.

   - $(x^2-3x-4)(x^2+x-2)=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{L}=\{-2,-1,1,4\}}}$

4. (3 P./11 min) Gegeben ist eine Parabel mit der Vorschrift $f(x)=-2x^2-4x+4$.

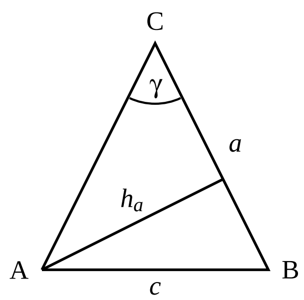
   a) (1.5 P./5 min/gemacht/leicht) Berechne den Scheitelpunkt dieser Parabel.

   - (0.5 P.) $S_x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{-4}=-1$
   - (0.5 P.) $S_y=-2\cdot(-1)^2-4(-1)+4=-2+4+4=6$
   - (0.5 P.) $S(-1|6)$

   b) (1.5 P./6 min/gemacht/leicht) Für welche x gilt: $f(x)=6$?

   - (0.5 P.) $6=-2x^2-4x+4$
   - (0.5 P.) $-2x^2-4x-2=0$
   - (1 P.) $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4(-2)(-2)}}{-4}=-1$

5. (2.5 P./8 min/neu/mittel) Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ($\overline{AC}=\overline{BC}$) mit $a=40.3\,\text{cm}$ und $h_a=11.5\,\text{cm}$.



   a) (1 P.) Berechne den Winkel γ.

   - $b=40.3\,\text{cm}$
   - $\underline{\underline{\alpha}}=\sin^{-1}(\frac{11.5}{40.3})\approx \underline{\underline{16.58^\circ}}$

   b) (1.5 P.) Berechne die Seite c (falls Du bei a) nichts erhalten hast, nimm an, γ sei 25°).

   - $\gamma/2\approx 8.29^\circ$
   - $c/2\approx 40.3\,\text{cm}\cdot\sin(8.29^\circ)\approx 5.81\,\text{cm} \Rightarrow \underline{\underline{c\approx 11.62\,\text{cm}}}$

6. (4.5 P./8 min) Gegeben ist die Funktion $y=-3x+6$.

   a) (1.5 P./3 min/gemacht/leicht) Berechne die Schnittpunkte mit der x- und der y-Achse. Gib Dein Ergebnis in der Form $S_x(\ldots|\ldots)$ bzw. $S_y(\ldots|\ldots)$ an.

- $y = 0 \Rightarrow -3x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{S_y(2|0)}}$
- $x = 0 \Rightarrow y = -3 \cdot 0 + 6 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{S_x(0|6)}}$

b) (1 P./2 min/gemacht/leicht) Liegt der Punkt mit den Koordinaten $(1000|-2995)$ unterhalb/auf/oberhalb des Graphen ? Begründe Deine Entscheidung.

- $y = -3 \cdot 1000 + 6 = -2994 \Rightarrow$ <u>unterhalb</u>

c) (2 P./5 min/neu/leicht) Gegeben sind die linearen Funktionen $f(x) = -2x + 3$ und $g(x) = 3x + 6$. Es wird nun eine Gerade eingezeichnet, die parallel zur y-Achse ist und durch den Punkt (1000|0) geht. Diese Gerade schneidet die beiden zu $f(x)$ und $g(x)$ gehörenden Geraden. Berechne die Länge der Strecke von Schnittpunkt zu Schnittpunkt.

- $f(1000) = -2000 + 3 = -1997$
- $g(1000) = 3000 + 6 = 3006$
- $1997 + 3006 = \underline{\underline{5003}}$

7. (2.5 P./10 min/gemacht/leicht) Löse folgendes Gleichungssystem nach x und y auf:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ \frac{x}{4} + y = 8 \end{array} \right|$$

- $\left| \begin{array}{l} 5x - 6y = 30 \\ x + 4y = 32 \end{array} \right|$
- $\left| \begin{array}{l} 5x - 6y = 30 \\ 5x + 20y = 160 \end{array} \right|$
- $-26y = -130 \Rightarrow \underline{\underline{y = 5}}$
- $5x - 30 = 30 \Rightarrow \underline{\underline{x = 12}}$

8. (3 P./10 min) Der Luftdruck p nimmt mit zunehmender Höhe exponentiell ab. Bei einem Höhenunterschied von 1 km beträgt seine Abnahme 11.7 %.

a) (1.5 P./5 min/neu/mittel) Auf Meereshöhe wird ein Druck von 1.1 bar gemessen. Wie gross ist der Luftdruck auf dem 8850 Meter hohen Mt. Everest?

- $B(x) = B(0) \cdot a^x$
- (1 P.) $B(x) = 1.1\,bar \cdot 0.883^x, x$: Höhe in km
- (0.5 P.) $B(8.85) = 1.1\,bar \cdot 0.883^{8.85} \approx 0.366\,bar$

b) (1.5 P./5 min/gemacht/mittel) Auf welcher Höhe ist der Luftdruck halb so gross wie auf Meereshöhe (wenn Du a) nicht lösen konntest, rechne mit der Gleichung $B(x) = 3 \cdot 0.6^x$) ?

- $0.55\,bar = 1.1\,bar \cdot 0.883^x$
- $0.5 = 0.883^x \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.883} \approx \underline{\underline{5.571\,\text{km}}}$

9. (6.5 P./19 min)

a) (1 P./3 min/gemacht/leicht) Das Volumen eines zylindrischen Holzstammes ist aus dem Umfang $u = 1.25\,\text{m}$ und der Länge $l = 3.4\,\text{m}$ zu berechnen.

- $u = 2\pi r \Rightarrow 1.25\,\text{m} = 2\pi r \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 0.1989\,\text{m}}}$.
- $V = \pi r^2 \cdot l = \pi(0.1989\,\text{m})^2 \cdot 3.4\,\text{m} \approx \underline{\underline{0.42\,\text{m}^3}}$

b) (3 P./8 min/neu/mittel) Bei einem Quader mit quadratischer Grundfläche ($a = b$) sind folgende Angaben bekannt: $c = 17\,\text{cm}, \text{O} = 1344\,\text{cm}^2$. Berechne die Seite a.

- $O = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow 1344 = 2a^2 + 34a + 34a \Rightarrow 2a^2 + 68a - 1344 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-68 \pm \sqrt{68^2 + 10752}}{4} = \frac{-68 \pm 124}{4} \Rightarrow x_1 = 14, x_2 = -48 \Rightarrow \underline{\underline{a = 14}}$

c) (2.5 P./8 min/neu/mittel) Welche Oberfläche hat eine gerade quadratische Pyramide, wenn eine Seitenfläche die Höhe von 15 cm hat und der Mantel 600 cm^2 beträgt ?

- x : Seitenlänge der Grundfläche
- $4 \cdot \frac{x \cdot 15\,\text{cm}}{2} = 544\,\text{cm}^2 \Rightarrow 2x \cdot 15\,\text{cm} = 600\,\text{cm}^2 \Rightarrow x = 20\,\text{cm}$
- $\underline{\underline{O}} = M + G = 600\,\text{cm}^2 + 400\,\text{cm}^2 = \underline{\underline{1000\,\text{cm}^2}}$

10. (3 P./9 min) Ein Glücksrad mit gleich grossen Sektoren und den Zahlen von 1-4 wird dreimal gedreht.

a) (1 P./3 min/neu/leicht) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal nacheinander die gleiche Zahl gedreht wird ?

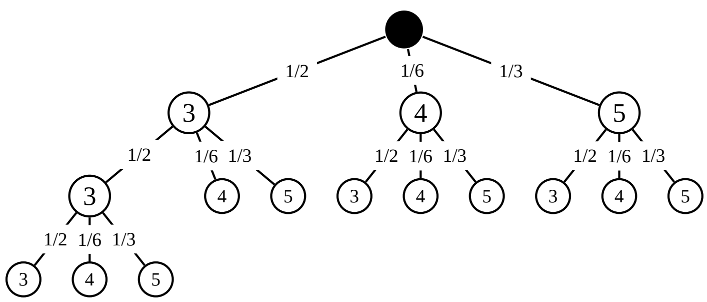
- $P(\text{3 mal die gleiche Zahl}) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$

b) (2 P./6 min/neu/mittel) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal die gleiche Zahl gedreht wird ?

- $\underline{\underline{P(\text{genau 2 mal die gleiche Zahl})}} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{4^3} = \underline{\underline{0.5625}}$

11. (3.5 P./12 min/neu/mittel) Ein Würfel hat 6 Seiten (Augenzahlen 3,3,3,4,5,5), bei denen alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit geworfen werden können. Der Würfel wird nun so lange geworfen, bis die Augensumme mindestens 7 beträgt.

a) (2 P.) Stelle diesen Zufallsversuch mit einem Baumdiagramm dar.



b) (1.5 P.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine gerade Augensumme ?

- Eine gerade Augensumme erhält man bei folgenden Pfaden: (3,3,4),(3,5),(4,4),(5,3),(5,5)
  - $P(3,3,4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$
  - $P(3,5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
  - $P(4,4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
  - $P(5,3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
  - $P(5,5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- Wir erhalten: $\underline{\underline{P(\text{gerade AS})}} = \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \approx \underline{\underline{0.51}}$