Lösungen Matur 2006-2007

1. (5 P.) Laut Wikipedia betrug die Weltbevölkerung am 1.1.1987 fünf Milliarden Menschen, am 1.1.2000 waren es 6 Milliarden.

   a) (2 P.) Stelle eine Exponentialfunktion und eine lineare Funktion auf, die beide dieses Wachstum beschreiben.

   - (1 P.) Exponentialfunktion:
     - $B(t) = B(0)a^t$ mit $B(0) = 5 \cdot 10^9$ und t in Jahren
     - $6 \cdot 10^9 = 5 \cdot 10^9 \cdot a^{13} \Rightarrow a = \sqrt[13]{1.2} \approx 1.0141$ (0.5 P.)
     - $\underline{\underline{B(t) \approx 5 \cdot 10^9 \cdot 1.0141^t}}$ (0.5 P.)
   - (1 P.) Lineare Funktion
     - $B(t) = B(0) + at$ mit $B(0) = 5 \cdot 10^9$ und t in Jahren
     - $6 \cdot 10^9 = 5 \cdot 10^9 + 13a \Rightarrow a = \dfrac{10^9}{13} \approx 7.7 \cdot 10^7$ (0.5 P.)
     - $\underline{\underline{B(t) \approx 5 \cdot 10^9 + 7.7 \cdot 10^7 t}}$ (0.5 P.)

   b) (1 P.) Welche der beiden Funktionen trifft den Wert 6.5 Milliarden am 1.7.2006 besser ?

   - $B(19.5) \approx 6.6 \cdot 10^9$ Menschen
   - $B(19.5) \approx 6.5 \cdot 10^9$ Menschen $\rightarrow$ Die lineare Funktion

   c) (2 P.) Wann ist mit diesen beiden Funktionen jeweils mit einer Weltbevölkerung von 10 Millarden zu rechnen ? Gib Monat und Jahr des gefundenen Datums an.

   - $10^{10} = 5 \cdot 10^9 \cdot 1.0141^t \Rightarrow t = 49.51$ Jahre (0.5 P.) $\Rightarrow$ im Juli 2036 (0.5 P.)
   - $10^{10} = 5 \cdot 10^9 + 7.7 \cdot 10^7 t \Rightarrow t = 64.94$ Jahre (0.5 P.) $\Rightarrow$ im Dezember 2051 (0.5 P.)

2. (9 P.) In Überraschungseiern hat es in jedem 6.Ei ein Spielzeugauto, in 75% der Eier eine Comicfigur und in den restlichen Eiern ein Plastiktier.

Auto	C-Figur	P-Tier
1/6	3/4	1/12

     (0.5 P.)

   a) (3.5 P.) Caroline kauft drei Eier Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie

      i) (1 P.) genau 3 Comicfiguren
         - $\underline{\underline{P(3 \text{ Comicfiguren})}} = 0.75^3 \approx \underline{\underline{0.42}}$

      ii) (1 P.) mindestens ein Plastiktier
         - $\underline{\underline{P(\text{ mind. 1 Plastiktier})}} = 1 - P(\text{kein Plastiktier}) = 1 - (11/12)^3 \approx \underline{\underline{0.23}}$

      iii) (1 P.) genau ein Spielzeugauto, ein Plastiktier und eine Comicfigur
         - Es gibt $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, die 3 Figuren auf 3 Plätze zu verteilen. (0.5 P.)
         - $\underline{\underline{P(1 \text{ Auto, 1 PT, 1 CF})}} = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12} \approx \underline{\underline{0.06}}$ (0.5 P.)

      unter den Eiern hat ?

   b) (1.5 P.) Wie viele Überraschungseier muss Marcel kaufen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens ein Spielzeugauto hat ?

      - P(ein Spielzeugauto) = 1/6, P(kein Spielzeugauto) = 5/6.
      - P(mind. ein Spielzeugauto) $\geq 0.95 \Rightarrow$ P(kein Spielzeugauto) ≤ 0.05 (0.5 P.)
      - Grenzfall: $0.05 = (5/6)^n \Rightarrow n \approx 16.43$ (0.5 P.)
      - $\Rightarrow$ <u>Max muss 17 Eier kaufen.</u> (0.5 P.)

   c) (2 P.) Der Spielgruppenleiter Christian kauft 20 Überraschungseier. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

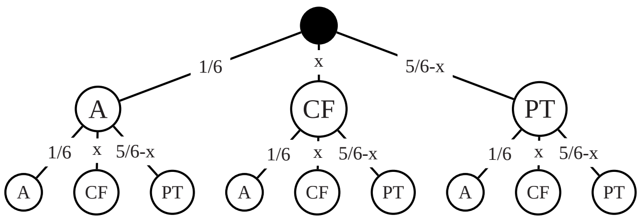
      i) genau 3 Plastiktiere
         - X : Anzahl Plastiktiere
         - $\underline{\underline{P(X=3)}} = \binom{20}{3} \cdot (1/12)^3 \cdot (11/12)^{17} = \underline{\underline{0.15}}$ (1 P.)

      ii) mindestens 4 und höchstens 12 Comicfiguren
         - X : Anzahl Comicfiguren in 20 Eiern
         - $\underline{\underline{P(4 \leq X \leq 12)}} = \sum_{i=4}^{12} \binom{20}{i} 0.75^i \cdot 0.25^{20-i} \approx \underline{\underline{0.1}}$ (1 P.)
         - Variante ohne TR: $\overline{X}$: Anzahl Autos oder Plastiktiere in 20 Eiern
         - $\underline{\underline{P(4 \leq X \leq 12)}} = P(X \leq 12) - P(X \leq 3) = P(\overline{X} \geq 8) - P(\overline{X} \geq 17) = 1 - P(\overline{X} \leq 7) - (1 - P(\overline{X} \leq 17)) = -P(\overline{X} \leq 7) + P(\overline{X} \leq 17) = -0.898 + 1 \approx \underline{\underline{0.1}}$

      unter den gekauften Eiern hat ?

d) (2 P.) Manuela kauft zwei Überraschungseier. Wie müssen die Wahrscheinlichkeiten für die Comicfiguren und die Plastiktiere verändert werden, so dass sie mit 25% Wahrscheinlichkeit genau 1 Plastiktier erhält ?

- $x = P(\text{eine Comicfigur}) \Rightarrow 5/6 - x = P(\text{ein Plastiktier})$ (0.5 P.)
- Der Baum sieht folgendermassen aus: (0.5 P.)



- $(5/6-x)\cdot 1/6 + (5/6-x)x + 1/6(5/6-x) + x(5/6-x) = 0.25 \Rightarrow x \approx 0.69, 5/6-x \approx 0.15$ (1 P.)
- Für die Comicfigur wird die Wahrscheinlichkeit auf ca. $\underline{\underline{0.69}}$ verändert, beim Plastiktier auf ca. $\underline{\underline{0.15}}$.

3. (9 P.) Zwei unabhängige Teilaufgaben.

a) (4.5 P.) Eine Fläche A wird durch die x-Achse und die Parabel $y = -x^2 + 2x$ begrenzt. Wie muss der Parameter m der Geradengleichung $y = mx$ $(m \in (0,2))$ gewählt werden, damit die Gerade die Fläche halbiert ?

- (0.5 P.) $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$
- (0.5 P.) $A = \int_0^2 -x^2 + 2x = 4/3$
- (1 P.) $mx = -x^2 + 2x \Rightarrow (x_1 = 0), x_2 = -m + 2$
- (2.5 P.) $\dfrac{(-m+2)\cdot\big(-(-m+2)^2 + 2(-m+2)\big)}{2} + \int_{-m+2}^{2} -x^2 + 2x \, \mathrm{d}x = 2/3 \Rightarrow \underline{\underline{m \approx 0.41}}$

b) (4.5 P.) Gegeben ist Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = a^2x^2 - (a+2)^2$ mit $a > 0$. Das Flächenstück zwischen dem Grafen von f und der x-Achse wird um die x-Achse rotiert. Wie gross muss a sein, damit der dabei entstehende Körper minimales Volumen hat ?

- (1 P.) Nullstellen: $a^2x^2 - (a+2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{a+2}{a}, x_2 = \dfrac{a+2}{a}$
- (1.5 P.) Volumenintegral: $V_x(a) = \pi \int_{-\frac{a+2}{a}}^{\frac{a+2}{a}} (a^2x^2 - (a+2)^2)^2 \, \mathrm{d}x = \dfrac{16\pi(a+2)^5}{15a}$
- (2 P.) $V_x'(a) = 0 \Rightarrow \dfrac{32\pi(a+2)^4(2a-1)}{15a^2} = 0 \Rightarrow (a_1 = -2), \underline{\underline{a_2 = 1/2}}$

4. (10 P.)Drei unabhängige Teilaufgaben:

a) (2.5 P.) Eine Polynomfunktion 3.Grades ($f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$) hat im Ursprung einen Wendepunkt und geht durch die Punkte $A(-1|3)$ und $B(2|0)$. Bestimme die Funktionsgleichung $f(x)$.

- $A(-1|3) : f(-1) = 3 \Rightarrow \underline{-a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 3}$ (Gl.1) (0.5 P.)
- $B(2|0) : f(2) = 0 \Rightarrow \underline{8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0}$ (Gl.2) (0.5 P.)
- $W(0|0) : f''(0) = 0 \Rightarrow \underline{2a_2 = 0}$ (Gl.3) (0.5 P.)
- $U(0|0) : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{a_0 = 0}$ (Gl.4) (0.5 P.)
- TR: $a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = -4$ und $a_0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x^3 - 4x}}$ (0.5 P.)

b) (3.5 P.) Gegeben ist die Funktionsvorschrift $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$

i) (1.5 P.) Bestimme die Gleichung der Kurventangenten im Punkt $P(-1|?)$

- $f'(x) = -xe^{-x}$
- $f'(-1) = e \approx 2.72 \Rightarrow y = 2.72x + n$ (0.5 P.)
- $f(-1) = 0$ (0.5 P.)
- $0 = 2.72(-1) + n \Rightarrow n = 2.72 \Rightarrow \underline{\underline{y = 2.72x + 2.72}}$ (0.5 P.)

ii) (2 P.) Wie müssen die reellen Parameter a und b bei der Funktion $F(x) = \dfrac{ax+b}{e^x}$ gewählt werden, damit die Bedingung $F'(x) = f(x)$ erfüllt ist ?

- $F'(x) = \dfrac{(-ax + a - b)}{e^x}$ (0.5 P.)
- Koeffizientenvergleich:
  - $-a = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = -1}}$ (1 P.)
  - $a - b = 1 \Rightarrow -1 - b = 1 \Rightarrow \underline{\underline{b = -2}}$ (0.5 P.)
- Variante: Wir stellen zwei Gleichungen auf:
  - $F'(1) = f(1) \Rightarrow -b/e = 2/e$ (Gl.1)
  - $F'(2) = f(2) \Rightarrow (-a-b)e^{-2} = 3/e^2$ (Gl.2) $\Rightarrow \underline{\underline{a = -1 \text{ und } b = -2}}$.

c) (4 P.) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 4 - 3 \cdot e^{-0.5x}$ und $g(x) = e^{0.5x}$.

- (2.5 P.) Die Graphen schneiden sich in zwei Punkten. Bestimme den Schnittwinkel im Schnittpunkt mit der grösseren x-Koordinate.
  - (0.5 P.) Schnittpunkt: $f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - 3 \cdot e^{-0.5x} = e^{0.5x} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 \approx 2.20$
  - (0.5 P.) $f'(x) \approx 1.5 \cdot 0.61^x \Rightarrow f'(2.20) \approx 0.5$ und (0.5 P.) $g'(x) \approx 0.5 \cdot 1.65^x \Rightarrow g'(2.20) \approx 1.5$
  - (0.5 P.) $\tan^{-1}(0.5) \approx 26.57°, \tan^{-1}(1.5) \approx 56.31°$
  - (0.5 P.) $\underline{\underline{\alpha}} = 56.31° - 26.57° = \underline{\underline{29.74°}}$
- (1.5 P.) Für welchen x-Wert im Intervall [0,2] ist die y-Koordinatendifferenz der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ am grössten ?
  - (1 P.) $Z(x) = f(x) - g(x) = 4 - 3 \cdot e^{-0.5x} - e^{0.5x}$
  - (0.5 P.) $Z'(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x \approx 1.1}}$

5. (10 P.) Zwei unabhängige Teilaufgaben.

a) (5 P.) In ein Quadrat mit der Seitenlänge a wird ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, in dieses wiederum ein Quadrat, usw.

i) (3 P.) Berechne die Seitenlänge des schraffierten Quadrats in Abhängigkeit von a.

- x bezeichne die Seitenlänge des Quadrates.
- Höhe des gleichseitigen Dreiecks: $h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ (1 P.)
- Die Dreiecke ΔABC und ADE sind ähnlich. Die Strecke $\overline{AD}$ ist halb so lang wie die Strecke $\overline{DE}$, weil wir ein 90°/60°/30°-Dreieck haben.
- Wir erhalten: (2 P.)

$$\frac{x}{a/2 - x/2} = \frac{\sqrt{3}a/2}{a/2} \Rightarrow \underline{\underline{x = a(2\sqrt{3} - 3)}}$$

- Variante:
  - (2 P.) $f(x) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}x$
  - (1 P.) Es gilt: $f\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right) = x \Rightarrow \sqrt{3}(a - x) = 2x \Rightarrow \sqrt{3}a - \sqrt{3}x = 2x \Rightarrow \sqrt{3}a = 2x + \sqrt{3}x \Rightarrow x(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}a \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}a}{2 + \sqrt{3}}$

ii) (2 P.) Wir betrachten die Folge der Flächeninhalte der Quadrate (GF), wobei a_1 für das grösste Quadrat verwendet wird, a_2 für das zweitgrösste, usw. Dazu sei $a = 10\,\text{cm}$. Berechne (näherungsweise) die Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, wenn $n \to \infty$?

- $a_1 = 100$
- (0.5 P.) Berechnung von a_2: $x = \dfrac{\sqrt{3}\cdot 10}{2+\sqrt{3}} \approx 4.6410 \Rightarrow x^2 \approx 21.539\,\text{cm}^2$
- (Berechnung von a_3: $x = \dfrac{\sqrt{3}\cdot 4.6410}{2+\sqrt{3}} \approx 2.1539 \Rightarrow x^2 \approx 4.6393\,\text{cm}^2$)
- (0.5 P.) $q = a_2 : a_1 = 0.2154$ (Bestätigung: $a_3 : a_2 = 0.2154$ $\checkmark$)
- (1 P.) $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{100}{1-0.2154} = \underline{\underline{127.452}}$
- Exaktes Ergebnis: $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}a}{2+\sqrt{3}}, a_2 = \dfrac{\sqrt{3}a_1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}a}{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{3a}{(2+\sqrt{3})^2}$
- $\sqrt{q} = a_2 : a_1 = \dfrac{\dfrac{3a}{(2+\sqrt{3})^2}}{\dfrac{\sqrt{3}a}{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{3a(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}a(2+\sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow q = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{3}{7+4\sqrt{3}}$

b) (5 P.) Ein Kartenhaus wird nach nebenstehendem Schema gebaut. Diese Figur zeigt ein 4-stöckiges Haus. Beachte, dass zuunterst keine Karten liegen.

i) (2 P.) Wie viele Karten braucht es für ein 8-stöckiges Haus ?

-

1	2	3	4	5	6	7	8
2	7	15	26	40	57	77	100

ii) (2 P.) Wie viele Karten braucht es für ein n-stöckiges Haus ?

- Wir nehmen zuerst an, dass zuunterst Karten liegen. Die Anzahl Karten pro Stockwerk:

1	2	3	4				n
3	$2 \cdot 3$	$3 \cdot 3$	$4 \cdot 4$				$n \cdot 3$

- Aufsummieren: $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + \ldots + n \cdot 3 = (1+2+3+\ldots+n) \cdot 3$
- $1+2+3+\ldots+n$ ist eine AF mit $a_1 = 1$ und $a_n = n$. Die Summenformel liefert:

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

- Wir erhalten damit: $3 \cdot \dfrac{n^2+n}{2}$
- Es werden noch die Karten, die zuunterst liegen, abgezogen (bei 1 Stock ist es 1 Karte, bei 2 Stöcken sind es 2 Karten,..., bei n Stöcken sind es n Karten). Wir erhalten

$$\underline{\underline{s_n}} = 3 \cdot \frac{n^2+n}{2} - n = \underline{\underline{\frac{3n^2+n}{2}}}$$

iii) (1 P.) Wie viele vollständige Stockwerke könnte man mit 2000 Karten bauen ?

- $2000 = \dfrac{3n^2+n}{2} \Rightarrow n = 36.34 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{36 vollständige Stockwerke}}}$