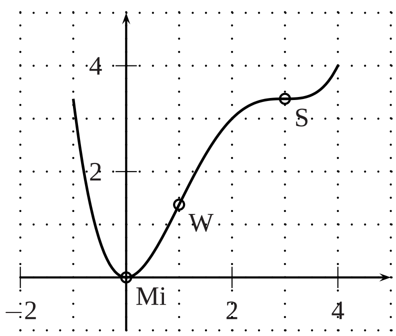
Lösungen zur Matur 2006

1. (11.5 P.) Gegeben ist die Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2$

   a) Führe eine Kurvendiskussion durch (grösstmöglicher Definitionsbereich in $\mathbf{R}$, Nullstellen, y-Achsenabschnitt, Extremalstellen, Wendepunkte), stelle die Funktion anhand Deiner Berechnungen graphisch dar und bestimme den Wertebereich.

   - $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$ und $f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$
   - (0.5 P.) $\mathbf{D} = \mathbf{R}$
   - (0.5 P.) Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{N(0|0)}}$
   - y-Achsenabschnitt: $f(0) = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$
   - $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$
     - $f''(0) = 4.5, f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mi(0|0)}}$
     - $f''(3) = 0 \Rightarrow$ Der Punkt muss weiter untersucht werden.
       * $f'''(x) = 3x - 6$
       * $f'''(3) = 3, f(3) = 3.375 \Rightarrow \underline{\underline{S(3|3.375)}}$



   - $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$, wobei die Stelle $x_2 = 3$ bereits untersucht wurde.
     - $f'(1) = 2, f(1) = 1.375 \Rightarrow \underline{\underline{W(1|1.375)}}$
   - Mit Hilfe des Graphen sehen wir, dass $\underline{\underline{\mathbf{W} = \mathbf{R}_0^+}}$

   b) Bestimme die Geradengleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(2|f(2))$.

   - $y = mx + n$
   - $m = f'(2) = 1$
   - $f(2) = 3 \Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 1$
   - Wir erhalten: $\underline{\underline{y = x + 1}}$

   c) Berechne die von $f(x)$ und der Tangente (aus b)) eingeschlossene Fläche im Bereich $-1 \leq x \leq 2$.

   - $x + 1 = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2 \Rightarrow x_1 = -0.45, x_2 = 2$ und $x_3 = 4.45$
   - $\underline{\underline{A}} = \left(\int_{-1}^{-0.45} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{-0.45} x + 1\,\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{-0.45}^{2} x + 1\,\mathrm{d}x - \int_{-0.45}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0.79 + 1.47 = \underline{\underline{2.26}}$

2. (6 P.) Ein Gefäss entsteht, indem der Graph der folgenden Funktion im Bereich $0 \leq x \leq 12$ (Einheiten: cm) um die x-Achse rotiert wird:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2\sqrt{x} + 2$$

a) Wieviel Liter Wasser fasst dieses Gefäss ?

- $\underline{\underline{V_x}} = \pi \int_0^{12} (2\sqrt{x}+2)^2 \,\mathrm{d}x \approx 1752.07\,\mathrm{cm}^3 \approx \underline{\underline{1.75\,l}}.$

b) In welcher Höhe muss die Markierung für 0.5l angebracht werden ?

- $500 = \pi \int_0^{12} (2\sqrt{x}+2)^2 \,\mathrm{d}x \Rightarrow \underline{\underline{a = 5.67}}$

c) Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Graph von f im Bereich $0 \leq x \leq 8$ um die y-Achse rotiert ?

- $V_y = \int\limits_{y_1}^{y_2} \left[f^{-1}\right]^2 \,\mathrm{d}y$
- $y_1 = f(0) = 2, y_2 = f(8) \approx 7.66$
- $y = 2\sqrt{x}+2 \Rightarrow 2\sqrt{x} = y-2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{y-2}{2}\right)^2$
- $\underline{\underline{V_y}} = \pi \int\limits_2^{7.66} \left[\left(\frac{y-2}{2}\right)^2\right]^2 \,\mathrm{d}y \approx \underline{\underline{228\,\mathrm{cm}^3}}$

3. (9 P.) Gegeben ist eine Folge von immer kleiner werdenden Würfeln. Der erste Würfel hat die Kantenlänge a. Das Volumen des n-ten Würfels ist immer um 5% kleiner als das des Vorangehenden.

a) Gib die explizite Definition dieser Folge an.

- $a_n = a^3 \cdot 0.95^{n-1}$

b) Berechne das Volumen des 20.Würfels, wenn $a = 2\,\mathrm{cm}$ ist.

- $\underline{\underline{a_{20}}} = 2^3 \cdot 0.95^{19} \approx \underline{\underline{3.02\,\mathrm{cm}^3}}$

c) Für wie viele Würfel ist die Kantenlänge grösser als die Hälfte von a (wenn a im Gegensatz zu Aufgabe b) unbekannt ist) ?

- $a, \sqrt[3]{0.95a^3}, \sqrt[3]{0.95^2a^3}, \ldots$
- $a, a\sqrt[3]{0.95}, a\sqrt[3]{0.95^2}, \ldots$
- $q = \dfrac{a\sqrt[3]{0.95}}{a} = \sqrt[3]{0.95} = 0.983$
- Bestätigung: $q = \dfrac{a\sqrt[3]{0.95^2}}{a\sqrt[3]{0.95}} = \sqrt[3]{0.95} = 0.983$
- $\dfrac{a}{2} = a \cdot 0.983^{n-1} \Rightarrow n = 41.43 \Rightarrow \underline{\underline{\text{für 41 Würfel}}}$

d) Wie hoch würde ein Turm, der durch das Aufeinanderstellen aller Würfel entstände ?

- $\underline{\underline{s}} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a_1}{1-q} = \underline{\underline{58.82a}}$

e) Der hundertste Würfel habe eine Oberfläche von $60\,\mathrm{cm}^2$. Berechne die Kantenlänge des ersten Würfels.

- $6a^2, 6a^2 \cdot 0.966, 6a^2 \cdot 0.934$
- $q = 0.966$
- $60 = 6a^2 \cdot 0.966^{99} \Rightarrow \underline{\underline{a = 17.52}}$

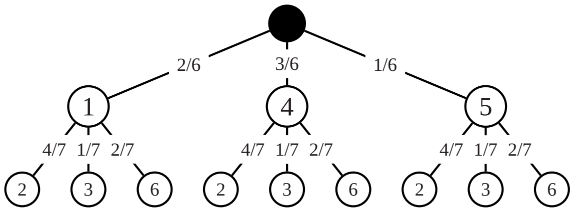
4. (9 P.) Spieler A und Spieler B haben je eine Drehscheibe mit drei Ziffern: A hat die Ziffern 1,4 und 5 und mit den Wahrscheinlichkeiten von 2/6, 3/6 und 1/6 bleibt die Drehscheibe auf den entsprechenden Ziffern stehen. B hat die Ziffern 2,3 und 6 auf seiner Drehscheibe mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten von 4/7, 1/7 und 2/7. Gewinner ist derjenige, dessen Drehscheibe bei der höheren Ziffer stehen bleibt.

   a) Ist das Spiel fair ?

      - X_1 : Zahl von Spieler A, X_2 : Zahl von Spieler B
      - $E(X_1) = 1 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = 3.1\overline{6}, E(X_2) = 2 \cdot \frac{4}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{2}{7} \approx 3.29$
      - Die Erwartungswerte sind verschieden, damit ist das Spiel nicht fair.

   b) Beide Spieler drehen das Rad. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt ?

      - Der Baum sieht folgendermassen aus:



      - A gewinnt bei folgenden Pfaden: (4,2), (4,3), (5,2), (5,3)
        - $P(\text{A dreht 4, B dreht 2}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{42}$
        - $P(\text{A dreht 4, B dreht 3}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{42}$
        - $P(\text{A dreht 5, B dreht 2}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{42}$
        - $P(\text{A dreht 5, B dreht 3}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$
      - Wir erhalten: $\underline{\underline{P(\text{A gewinnt})}} = \frac{12}{42} + \frac{3}{42} + \frac{4}{42} + \frac{1}{42} = \frac{20}{42} \approx \underline{\underline{0.476}}$

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt B bei 3 von 8 Spielen (wenn Du bei b) nichts erhalten hast, nimm für alle weiteren Teilaufgaben an: P(A gewinnt) = 0.45) ?

      - X: Anzahl Siege von B, $n = 8$, $P(\text{B gewinnt}) = 11/21$
      - $\underline{\underline{P(X = 3)}} = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^5 \cdot \left(\frac{11}{21}\right)^3 \underline{\underline{\approx 0.20}}$

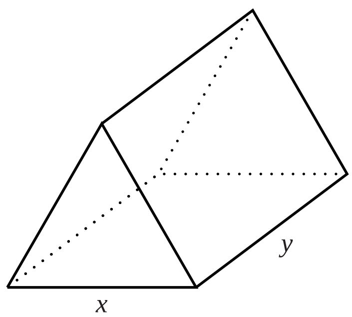
   d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A bei mindestens 2 von 10 Spielen ?

      - X: Anzahl Siege A
      - $\underline{\underline{P(X \geq 2)}} = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^0 \cdot \left(\frac{11}{21}\right)^{10} - \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^1 \cdot \left(\frac{11}{21}\right)^9 \underline{\underline{\approx 0.984}}$

   e) Wie oft müssen die beiden spielen, damit B mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal gewinnt ?

      - X: Anzahl Siege von B
      - $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^n \cdot \left(\frac{11}{21}\right)^0 = 1 - \left(\frac{10}{21}\right)^n = 0.99 \Rightarrow n = 6.20$
        $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Die beiden müssen 7 mal spielen.}}}$

5. (6.5 P.) Eine Firma stellt die Verpackung für eine Schokolade her. Zwei Flächen der Verpackung sind gleichseitige Dreiecke, die anderen drei Flächen sind Rechtecke, die rechtwinklig auf den Dreiecksflächen stehen (s.Skizze). Wie müssen die beiden Masse x und y gewählt werden, damit die Oberfläche der Verpackung minimale Grösse besitzt, wenn der Inhalt $100\,\text{cm}^3$ betragen soll ?



- h bezeichne die Höhe des gleichseitigen Dreiecks.
- Es gilt: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = x^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$
- Wir erhalten: $h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$
- Die Oberfläche: $O(x,y) = 2 \cdot \dfrac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} + 3xy = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + 3xy$
- Das Volumen beträgt $100\,\text{cm}^3 \Rightarrow \dfrac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{400}{\sqrt{3}x^2}$ (NB)
- $O(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + 3x \cdot \frac{400}{\sqrt{3}x^2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + \frac{1200}{\sqrt{3}x}$
- $O'(x) = \sqrt{3}x - \dfrac{400\sqrt{3}}{x^2}$
- $O'(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x \approx 7.368\,\text{cm}}} \Rightarrow \underline{\underline{y \approx 4.254\,\text{cm}}}$

6. (9 P.) Gegeben sind die Punkte A(0|0) und B(1|1).

   a) A und B liegen auf dem Graphen einer Funktion 2.Grades, dazu ist B auch noch der Scheitelpunkt. Skizziere den Graphen und gib die Vorschrift der Funktion an.

   - $f(x) = ax^2 + bx + c$
   - $f(0) = \underline{c = 0}$ (Gl. 1)
   - $f(1) = \underline{a + b = 1}$ (Gl. 2)
   - $f(2) = \underline{4a + 2b = 0}$ (Gl. 3). Aus den drei Gleichungen erhalten wir: $a = -1, b = 2$ und $c = 0$.
   - Damit ist $\underline{\underline{f(x) = -x^2 + 2x}}$

   b) Gib eine Vorschrift einer Funktion 2.Grades an (nicht die gleiche wie bei a)), auf deren Graph die Punkte A und B liegen und deren Graph nach unten geöffnet ist. Skizziere dann den Graphen.

   - Wir wählen einen beliebigen 3.Punkt, z.B. D=(5|0).
   - $f(0) = \underline{c = 0}$ (Gl. 1)
   - $f(1) = \underline{a + b = 1}$ (Gl. 2)

- $f(5) = \underline{25a+5b=0}$ (Gl. 3). Aus den drei Gleichungen erhalten wir: $a = -0.25, b = 1.25$ und $c = 0$.
- Damit ist $\underline{\underline{f(x) = -0.25x^2 + 1.25x}}$

c) Gib eine Formel für die 2.Nullstelle an, die eine Funktion 2.Grades (der Graph ist nach unten geöffnet) durch A und B hat.

- $c = 0 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx$
- $f(1) = 1 \Rightarrow a+b = 1 \Rightarrow b = 1-a$
- Einsetzen: $f(x) = ax^2 + (1-a)x$
- Nullstelle ($y = 0$): $0 = ax^2 + (1-a)x \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0, x_2 = \frac{a-1}{a}}}$

d) Der endliche Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion 2.Grades (nach unten geöffnet) durch A und B und der x-Achse soll möglichst klein sein. Bestimme die entsprechende Funktionsvorschrift (wenn Du b) nicht lösen konntest, dann nimm an, das Ergebnis sei $(a+1)/(a-1)$ gewesen).

- $\int\limits_0^{\frac{a-1}{a}} ax^2 - (1-a)x \,\mathrm{d}x = -\dfrac{(a-1)^2(a+2)}{6a^2} = F(a)$
- $F'(a) = -\dfrac{(a-1)^2(a+2)}{6a^3}$
- $F'(a) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = -2}}, a_2 = 1$ (a_2 fällt weg, weil die Parabel nach unten geöffnet ist).