4.2 Differentialrechnung II

Inhaltsverzeichnis

1 Konstante Funktion, Potenzfunktion und Summenregel

Wir haben beim Thema Differentialrechnung I gesehen, dass es ziemlich mühsam ist, die Ableitung einer Funktion mit dem Differentialquotienten zu ermitteln. In diesem Skript werden wir Regeln kennenlernen, mit deren Hilfe man Ableitungsfunktionen ohne Differentialquotienten berechnen kann.

Zuerst betrachten wir eine ganz einfache Funktion, die konstante Funktion (z.B. $f(x) = 3,\ f(x) = 5$). Wir wissen, dass der Graph dieser Funktion horizontal ist. Der Graph hat also an jeder Stelle x die Steigung 0, weshalb die Ableitungsfunktion die Nullfunktion ist.

Satz 1 *Eine Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = c$ $(c \in \boldsymbol{R})$ hat die Ableitung 0. Das heisst:*

Der Beweis für diesen Satz ist ganz einfach:

Beweis

Den nächsten Satz haben wir beim letzten Skript schon beobachtet. Für natürliche Exponenten haben wir folgende Ergebnisse mit dem Differenzialquotienten berechnet:

$f(x)$	$f'(x)$
x^3	$3x^2$
x^2	$2x$
x	1

Beobachtung: Offensichtlich können wir den Exponenten einfach nach vorne ziehen und eins abzählen.

Wir vermuten also folgenden Satz:

Satz 2 *Für die Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = x^n (n \in \boldsymbol{N})$ gilt:*

Der Beweis:

- Wir haben eine Funktion der Form $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$.
- Der Differentialquotient lautet: $f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$
- Unser Problem: Wie können wir den Term $(x+h)^n$ ausmultiplizieren ?

- Wir betrachten die Exponenten 2,3 und 4:
  - $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$
  - $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$
  - $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$
  - ...
- Wir können beobachten:
  - Bei der Variable x wird der Exponent runtergezählt
  - Bei der Variable h wird der Exponent raufgezählt
- Die Zahlen vor den Variablen können wir mit dem Pascalschen Dreieck ermitteln, aber auch mit Binomialkoeffizienten:

$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$		
$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$	
$\binom{4}{0} = 1$	$\binom{4}{1} = 4$	$\binom{4}{2} = 6$	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{4}{4} = 1$

- Wir sehen, dass die Zahlen vor den Variablen übereinstimmen mit den Binomialkoeffizienten.
- Wir können also schreiben:
  - $(x+h)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xh + \binom{2}{2}h^2$
  - $(x+h)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2h + \binom{3}{2}xh^2 + \binom{3}{3}h^3$
  - $(x+h)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3h + \binom{4}{2}x^2h^2 + \binom{4}{3}xh^3 + \binom{4}{4}h^4$
  - $(x+h)^n =$

- Kehren wir zurück zu unserem Differentialquotienten:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Beispiele

Bei der nächsten Regel haben wir eine Summe von Funktionen. Ein Beispiel dazu haben wir im letzen Skript bereits gesehen, für $f(x) = x^2 - x$ erhielten wir graphisch $f'(x) = 2x - 1$. Offensichtlich können wir die Ableitungsfunktion bestimmen, indem wir die einzelnen Funktionen (in diesem Falle x^2 und $-x$) ableiten und dann die Ergebnisse addieren/subtrahieren.

Satz 3 *Gegeben ist eine Funktion f, die als Summe der Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ geschrieben werden kann: $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$. Dann gilt:*

Beweis

Beispiele

Übungen

1. Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen.

   a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = x^{2n}$

   d) $f(x) = x^{3n+2}$ e) $f(x) = 9$ f) $f(x) = 0$

[s.hinten]

2. Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen und **begründe jeden Schritt** mit einer Regel.

   a) $f(x) = x + 9$ b) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 5$

[s.hinten]

2 konstante Faktoren

Es ist die Ableitung von $f(x) = 3x^5$ zu berechnen. Mit unserem bisherigem Wissen ist das möglich: Wir sehen, dass man auf andere Weise auch dieses Ergebnis erhalten hätte, nämlich indem man x^5 abgeleitet und dann dass Ergebnis mit 3 multipliziert hätte. Dass man das darf, sagt uns der nächste Satz.

Satz 4 *Die Funktion $f(x)$ ist das Produkt aus der Konstanten $c \in \boldsymbol{R}$ und der Funktion g, d.h. $f(x) = c \cdot g(x)$. Dann gilt für die Ableitung:*

Beweis

Beispiele

Übungen

3. Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -2x$ c) $f(x) = 2x^{2n}$

d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ e) $f(x) = ax^3$ f) $f(x) = ax^2 + bx$

[s.hinten]

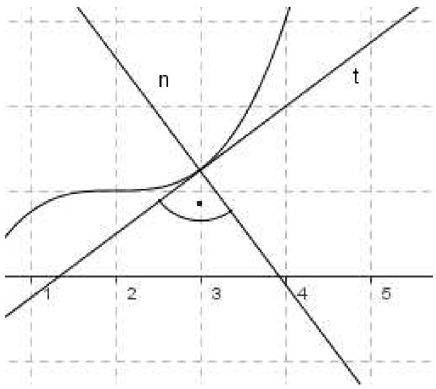
4. Gib eine Funktion $f(x)$ so an, dass gilt: $f'(x) = x^3 - 3x$

5. Bestimme bei der Funktion $f(x) = x^4 - 7x^2 + ax$ den Parameter a so, dass der Graph bei $x = 2$ die Ableitung 3 hat. [$a = -1$]

6. Ohne TR: Der Graph der Funktion $f(x) = ax^3 + bx$ hat in $P = (2 \mid -10)$ die Steigung 3. Bestimme die Werte von a und b. [$a = 1, b = -9$]

7. Ohne TR: An welcher Stelle haben die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ und $g(x) = -6x^2$ die gleiche Ableitung ? [$x_1 = 0, x_2 = -8$]

3 Tangenten und Normalen



Die **Tangente** t an den Graphen einer Funktion f im Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$ ist eine Gerade durch diesen Punkt, deren Steigung m mit der Kurvensteigung an der Stelle x_0 übereinstimmt, d.h. $m_T = f'(x_0)$.

Die **Normale** n an den Graphen von f im Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$ ist die zur Tangente t senkrecht stehende Gerade durch den Punkt P. Ihre Steigung ist der negative Kehrwert (wir verzichten auf die Herleitung dieses Ergebnisses) der Tangentensteigung, d.h. $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

- Berechne die Gleichung der Tangenten t bei $x = 2$.

- Berechne die Gleichung der Normalen n bei $x = 2$.

- Welchen Winkel schliesst t mit der x-Achse ein ?

Übungen

8. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$.
   a) In welchen Punkten des Graphen hat die Funktion f die Steigung 4 ? Wie lauten die Tangentengleichungen in diesen Punkten ? [$x = 3, y_T = 4x - 13.5; x = -2, y_T = 4x + \frac{22}{3}$]
   b) Welchen Winkel schliesst die Tangente von f an der Stelle $x = 1$ mit der x-Achse ein ? [63.43°]
9. In welchen Punkten und unter welchen Winkeln schneiden sich die beiden Funktionen $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ und $g(x) = x - 1$? Skizziere die beiden Graphen mit Hilfe des TI-89. [(2|1),30.96°;(5|4),108.43°)]
10. Wie lautet die Gleichung der Normale n an den Graphen von $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ an der Stelle $x_0 = -2$? [$y_n = \frac{3}{4}x + \frac{17}{6}$]
11. Wie muss der Parameter a gewählt werden, damit sich die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ und $g(x) = x^2 + 3x + a$ berühren ? [$a = -4.875$]

Manchmal sind die Problemstellungen im Zusammenhang mit Kurventangenten und Normalen anspruchsvoller als in den vorhergehenden Aufgaben.

Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$. Welche Gerade durch den Punkt $P(-1|0)$ ist Tangente an den Graphen von f ?

Übungen

12. Welche Ursprungsgerade(n) (d.h. welche Gerade der Form $t(x) = mx$) ist(sind) Tangente(n) an der Graphen von $f(x) = x^2 + 1$? $[t_1(x) = -2x, t_2(x) = 2x]$

13. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. Welche Gerade durch den Punkt $P(1|0)$ ist Tangente an den Graphen von f ? $[t_1(x) = 0, t_2(x) = 4x - 4]$

14. Die solve-Funktion des TR kann verwendet werden. Die Tragseile einer Hängebrücke sind an Pfeilern befestigt, die 250 m auseinander stehen, und hängen in Form einer Parabel, deren tiefster Punkt 50 m unter den Aufhängungspunkten liegt. Ermittle den Winkel zwischen Seil und Pfeiler. $[y = 0.0032x^2 - 0.8x; 51.34°]$

15. (Zusatz) Die Gerade n geht durch den Punkt $P(0|1)$ und schneidet den Graphen von $f(x) = x^2$ im Inneren des 1.Quadranten rechtwinklig (orthogonal). Bestimme den Schnittpunkt S. Löse die Aufgabe zeichnerisch und rechnerisch.

4 Die Produktregel

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen, die als Produkt von zwei Funktionen geschrieben werden können: $f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$. Es gilt folgende Regel:

Satz 5 *(Produktregel) Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$. Es gilt:*

Der Beweis:

Übung

16. Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen mit der Produktregel und noch auf einem zweiten Weg. Vergleiche anschliessend die Ergebnisse.

a) $f(x) = x^4 \cdot x^5$ b) $f(x) = (2x^3) \cdot (3x^4)$ c) $f(x) = (x^3 + x^2) \cdot (x^2 + x)$
d) $f(x) = (x^2 + 3) \cdot (x^3 - 5)$ e) $f(x) = (1 - x^2) \cdot (1 + x^2)$

[s.hinten]

5 Die Kettenregel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (3x + 1)^2$. Diese Funktion lässt sich als Verkettung der beiden einfacheren Funktionen $g(x) = x^2$ und $i(x) = 3x + 1$ darstellen, denn es gilt: $f(x) = g(i(x))$. g heisst äussere und i heisst innere Funktion.

Überzeugen wir uns zuerst davon, dass $f(x) = g(i(x))$:

Versuchen wir die Ableitung der Funktion f zu bestimmen, zuerst mit uns vertrauten Ableitungsregeln:

Satz 6 *(Kettenregel) Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = g(i(x))$. Es gilt:*

Beweis:

Beispiel: $f(x) = (3x+1)^{10}$

Übungen

17. Notiere $i(x)$,u und $g(u)$ bei den folgenden Funktionen.

    a) $f(x) = (x-2)^4$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$

    d) $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

18. Berechne bei den folgenden Funktionen die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel. Hinweise: Wir haben bereits im vorderen Skript berechnet: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ (d) und $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

    a) $f(x) = (1+5x)^3$ b) $f(x) = (1-3x)^2$ c) $(2x-1)^8$

    d) $f(x) = \dfrac{1}{8x+1}$ e) $\sqrt{6x-2}$

    [s.hinten]

19. Berechne bei den folgenden Funktionen die Ableitung durch mehrfache Anwendung der Kettenregel.

    a) $f(x) = ((x^2+1)^2+x)^4$ b) $\sqrt{2x+1}^3$ c) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}}$

    $[4(4x^3+4x+1)(x^4+2x^2+x+1)^3; 3\sqrt{2x+1};; \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}]$

6 Die Quotientenregel

Der nächste Satz besagt, wie wir mit einer Funktion umzugehen haben, die der Quotient zweier Funktionen ist.

Satz 7 *(Quotientenregel) Die Funktion f ist der Quotient der Funktionen g und h (wobei $h(x) \neq 0$), das heisst*

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Es gilt:

Wir verzichten auf den nicht besonders schweren, aber langwierigen Beweis.

Beispiel

20. Ermittle die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{2x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+3}$

d) $f(x) = \dfrac{a-x}{ax^2}$

e) $f(t) = \dfrac{1}{t^2-1}$

[$\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$, $\frac{x^3+2}{2x^3}$, $\frac{2x^2+12x-1}{(x+3)^2}$, $\frac{x-2a}{ax^3}$, $-\frac{2t}{(t^2-1)^2}$]

21. Beweise die folgende Ableitungsregel:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

7 Die erweiterte Potenzregel

Dank der Kettenregel können wir nun die Potenzregel, die in Abschnitt 1 nur für natürliche Exponenten formuliert wurde, erweitern auf die rationalen Zahlen. Wir haben mit dem Differentialquotienten schon einige Ableitungen berechnet, hier noch einmal unsere Ergebnisse:

$f(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Wir haben damals beobachtet, dass man (in der Potenschreibweise) auch bei negativen und gebrochenen Exponenten den Exponenten vor den Term schreibt und im Exponenten eins abzieht (gleich wie bei den natürlichen Exponenten).

Satz 8 *Für eine Funktion f mit $f(x) = x^q (q \in \mathbf{Q})$ gilt:*

Beweis:

Beispiele

Übungen

22. Berechne die Ableitung ohne TR. Im Ergebnis dürfen weder negative noch gebrochene Exponenten enthalten sein.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $f(x) = x^{-4}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ f) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

$[-\frac{2}{x^3}; -\frac{4}{x^5}; \frac{1}{2\sqrt{x}}; \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}; \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}]$

23. Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen. Im Ergebnis dürfen keine negativen und keine gebrochenen Exponenten vorkommen. Schreibe bei b) alle Terme unter einen Bruchstrich.

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ b) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ c) $f(x) = 3\sqrt{x^3} - \dfrac{2}{x}$

$[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \frac{-x^2-2x-3}{x^4}; \frac{9\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{x^2}]$

24. Berechne die folgenden Ableitungen mit der Produktregel bzw. mit der Kettenregel. Schreibe bei a) alle Terme unter einen Bruchstrich.

a) $\sqrt{x} \cdot (x + x^2)$ b) $f(x) = \sqrt{2x}$ c) $f(x) = \sqrt{1-x}$

$[\frac{5x^2+3x}{2\sqrt{x}}; \frac{1}{\sqrt{2x}}; -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}]$

25. Bestimme die folgenden Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel und der Produktregel.

a) $f(x) = (2x-1)^3 \cdot \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{x}$

$[6\sqrt{x}(2x-1)^2 + \frac{(2x-1)^3}{2\sqrt{x}}; -\frac{1}{2x\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{x^2}]$

26. Welche Ursprungsgerade t ist Tangente an den Graphen von $f(x) = \frac{1}{x} - 1$? $[y = -\frac{1}{4}x]$

27. (Zusatz) Welche Ursprungsgerade t ist Tangente an den Graphen von $f(x) = \sqrt{x} - 1$?

28. Welche Tangente t an den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ ist parallel zur Geraden g, die durch die Punkte $P(4|2)$ und $Q(0|0)$ geht ? Löse die Aufgabe zeichnerisch und rechnerisch. $[y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}]$

8 mehrfache Ableitungen

Bisher haben wir eine Funktion nur einmal abgeleitet. Man kann sie grundsätzlich natürlich auch mehrfach ableiten, indem man von der Ableitung wiederum die Ableitung bestimmt, usw. Wir definieren:

Definition 1 *Gegeben sei eine Funktion f. Die n-te Ableitung bezeichnen wir mit $f^{(n)}(x)$, sie berechnet sich mit:*

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Bemerkung

- Die n-te Ableitung ist also rekursiv definiert. Z.B. berechnen wir die vierte Ableitung, indem wir die dritte Ableitung noch einmal ableiten.

Beispiele

- Berechne die ersten 3 Ableitungen von $f(x) = x^5$

- Berechne die 1. und 2.Ableitung von $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x}$

Übungen

29. Berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = 3x^4$ c) $f(x) = 5x^2$

[s.hinten]

30. Berechne die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x+2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{a+bx}{a-bx}$

$\left[f'(x) = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}; f''(x) = \frac{10}{(x+2)^3}; f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x-1)^3}; f''(x) = \frac{4x+8}{(x-1)^4}; f'(x) = \frac{2ab}{(a-bx)^2}; f''(x) = \frac{4ab^2}{(a-bx)^3}\right]$

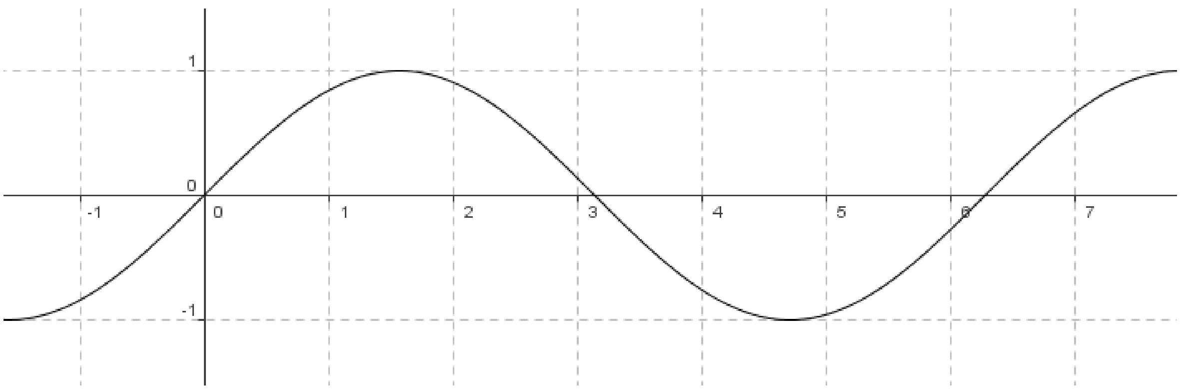
31. Berechne die zweite und dritte Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2} (x \neq 2)$. Die erste Ableitung wurde weiter oben bereits berechnet, sie lautet: $f'(x) = \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$. $\left[f''(x) = \frac{12}{(x-2)^3}; f'''(x) = -\frac{36}{(x-2)^4}\right]$

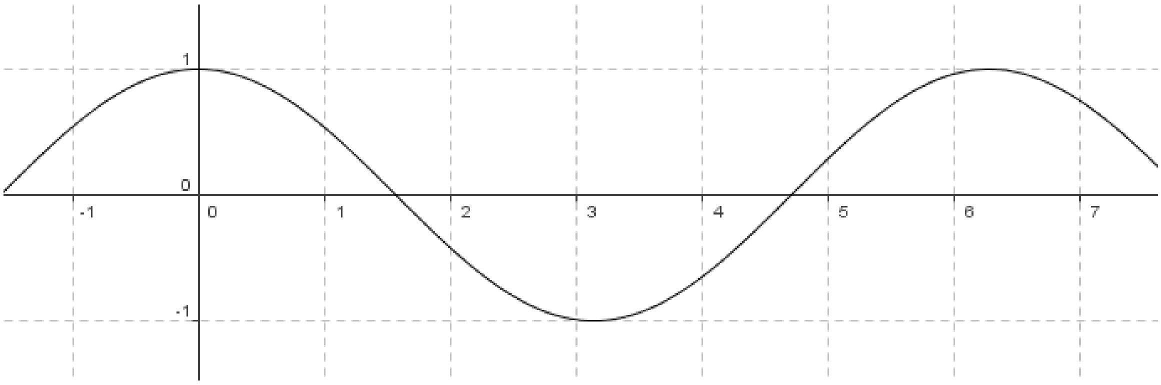
9 Die Ableitung von trigonometrischen Funktionen

Wir stellen uns die Frage, wie die Ableitung der trigonometrischen Funktionen lautet. Zuerst versuchen wir, die Ableitung der Sinusfunktion mit der Definition der Ableitung zu berechnen:

- $\sin'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$. Wir können hier nichts mit dem Ausdruck $\sin(x+h)$ anfangen.

Wir schlagen deshalb den altbekannten Weg ein, zeichnen den Funktionsgraphen und schätzen einfach zeichnerisch die Steigungen beim Funktionsgraphen an ausgewählten Stellen ab. Wichtig ist, dass die x- und die y-Achse die gleiche Skalierung haben, deshalb haben wir auf der x-Achse das Bogenmass. Die Graphen der Sinus- und Cosinusfunktion im Bogenmass:





Wir beobachten:

Auf die mathematische Bestätigung dieser Vermutung verzichten wir, weil Mittel der höheren Mathematik dazu benötigt würden.

Mit diesen beiden Ergebnissen können wir nun mit Hilfe der Quotientenregel die Ableitung der Tangensfunktion berechnen:

Wir fassen unsere Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

Satz 9 *(trig. Funktionen). Es gilt:*

- $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) =$
- $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) =$
- $f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) =$

Übungen

32. Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$	b) $f(x) = \sin(4x)$	c) $\cos(x^2)$
d) $f(x) = \sin^2(x)$	e) $f(x) = x\cos(x)$	f) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$
g) $f(x) = \sin(\cos(x))$	h) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$	i) $\sqrt{\sin(x)}$

$\left[\cos(x) - 2\sin(x); 4\cos(4x); -2x\sin(x^2); 2\sin(x)\cos(x); \cos(x) - x\sin(x); \cos^2(x) - \sin^2(x); -\cos(\cos(x)) \cdot \sin(x); -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}; \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}\right]$

33. Wende bei den folgenden Aufgaben mehrfach die Produkt bzw. Kettenregel an.

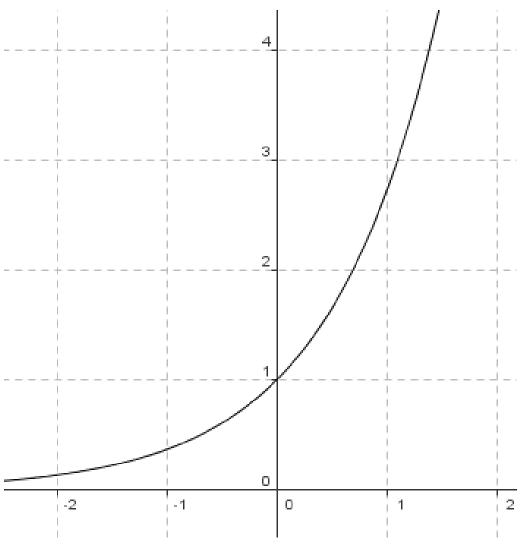
a) $x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$	b) $\sin(\sin(x^2))$	c) $\sin(\cos(\sin(x)))$

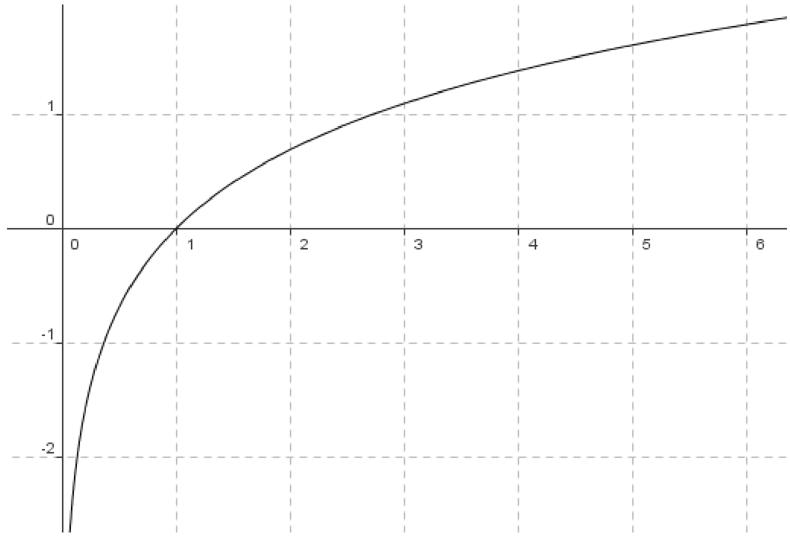
$\left[x\cos^2(x) - x\sin^2(x) + \sin(x)\cos(x); \cos(\sin(x^2))\cos(x^2) \cdot 2x; -\cos(\cos(\sin(x))) \cdot \sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)\right]$

34. Gegeben sind die Sinus- und die Cosinusfunktion. Wo haben die Graphen im Intervall $[0, 2\pi]$ die gleiche Steigung ? $\left(\text{Hinweis: } \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x\right)$. [2.36,5,50]

10 Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion und der natürlichen Logarithmusfunktion

In diesem Abschnitt betrachten wir die Ableitungen der natürlichen Exponentialfunktion und der natürlichen Logarithmusfunktion. Wir ermitteln die Ableitungen zuerst wieder zeichnerisch:





Rechnerisch können wir die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ folgendermassen berechnen:

Damit können wir die letzte Regel dieses Skriptes notieren:

Satz 10 *Die Ableitungen der nat. Exponential- und Logarithmusfunktion lauten folgendermassen:*

- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) =$
- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) =$

Übungen

35. Berechne die Ableitungsfunktionen zu den folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 2e^x + 1$ b) $f(x) = -\ln(x) + x$ c) $f(t) = Ke^t$

[s.hinten]

36. Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen mit der Kettenregel bzw. mit der Produktregel.

a) $f(x) = e^{-4x}$ b) $f(x) = e^{x^2}$ c) $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$

d) $f(t) = N_0 e^{-\alpha t}$ e) $f(x) = ae^{-kx^2}$ f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$

$[-4e^{-4x}; 2xe^{x^2}; -\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}; -\alpha \cdot N_0 e^{-\alpha t}; -2kxae^{-kx^2}; \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^x]$

37. Berechne die folgenden Ableitungen.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

c) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

38. Suche den Fehler bei den folgenden Rechnungen.

a) $[(x^2+2) \cdot e^{4x}]' = 2x \cdot e^{4x} + (x^2+2) \cdot e^{4x} = (x^2+2x+2) \cdot e^{4x}$

b) $[(e^x - 1)^2]' = [(e^x)^2 - 2e^x + 1]' = 2e^x - 2e^x = 0$

c) $[(2e^x + 4)^2]' = 2(2e^{2x} + 4) = 4e^{2x} + 8$

39. Ermittle die Ableitung der folgenden Funktion.

a) $f(x) = \ln(2x)$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$ c) $f(x) = \ln x^2 - 3$

d) $f(x) = \ln e^x + e^{-x}$ e) $f(x) = \ln(\ln(x))$ f) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

g) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$[\frac{1}{x}; -\frac{1}{x \cdot \ln^2(x)}; \frac{2}{x}; 1 - e^{-x}; \frac{1}{x \cdot \ln(x)}; \frac{1}{2x \cdot \sqrt{\ln(x)}}; \frac{2}{1-x^2}]$

40. In der untenstehenden Tabelle sind auf der linken Seite Funktionen $f'(x)$ zu sehen, auf der rechten Seite die dazugehörigen Funktionen $f(x)$. Bestimme die richtigen Paare.

A. $f'(x) = \ln x + x$	I. $f(x) = x(\ln x + \ln 2 - 1)$
B. $f'(x) = \ln x + 1$	II. $f(x) = \ln(x^2)$
C. $f'(x) = \frac{2}{x}$	III. $f(x) = x\ln x - x + 0.5x^2$
D. $f'(x) = \ln(2x)$	IV. $f(x) = x\ln x$

41. Ermittle die Ableitung von $\log_a(x)$. Hinweis: $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. $[\frac{1}{x \cdot \ln a}]$

42. Zeige, dass die Regel gilt: $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$. Hinweis: $a^x = e^{\log_e a^x}$.

11 Ergebnisse

1. Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f'(x) = 5x^4$ b) $f'(x) = 1$ c) $f'(x) = 2n \cdot x^{2n-1}$
d) $f'(x) = (3n+2)x^{3n+1}$ e) $f'(x) = 0$ f) $f'(x) = 0$

2. Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen und **begründe jeden Schritt** mit einer Regel.

a) $f'(x) = 1$ b) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

3. Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f'(x) = 6x$ b) $f'(x) = -2$ c) $f'(x) = 4nx^{2n-1}$
d) $f'(x) = 4x - 3$ e) $f'(x) = 3ax^2$ f) $f'(x) = 2ax + b$

16. Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen mit der Produktregel und noch auf einem zweiten Weg. Vergleiche anschliessend die Ergebnisse.

a) $9x^8$ b) $42x^6$ c) $5x^4 + 8x^3 + 3x^2$
d) $5x^4 + 9x^2 - 10x$ e) $-4x^3$

17. a) $i(x) = x-2, u = x-2, g(u) = u^4$ b) $i(x) = x^2+1, u = x^2+1, g(u) = \frac{1}{u}$
c) $i(x) = 3x+1, u = 3x+1, g(u) = \sqrt{u}$ d) $i(x) = x-4, u = x-4, g(u) = \sqrt[3]{u}$
e) $i(x) = (x+3)^2, u = (x+3)^2, g(u) = \frac{1}{u}$ f) $i(x) = x-1, u = x-1, g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$

17. Berechne die folgenden Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel.

a) $i(x) = x-2, u = x-2, g(u) = u^4$ b) $i(x) = x^2+1, u = x^2+1, g(u) = \frac{1}{u}$ c) $i(x) = 3x+1, u = 3x+1, g(u) = \sqrt{u}$
d) $i(x) = x-4, u = x-4, g(u) = \sqrt[3]{u}$ e) $i(x) = x+3, u = x+3, g(u) = \frac{1}{u^2}$ f) $i(x) = x-1, u = x-1, g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$

18. Berechne die folgenden Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel.

a) $15(1+5x)^2$ b) $-6(1-3x)$ c) $16(2x-1)^7$
d) $-\frac{8}{(8x+1)^2}$ e) $\frac{3}{\sqrt{6x-2}}$

29. Berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$
b) $f'(x) = 12x^3, f''(x) = 36x^2, f'''(x) = 72x$
c) $f'(x) = 10x, f''(x) = 10, f'''(x) = 0$

36. Berechne die Ableitungsfunktionen zu den folgenden Funktionen.

a) $2e^x$ b) $-\frac{1}{x} + 1$ c) Ke^t