3.9 Grenzwerte

(Thema aus dem Bereich Analysis)

Inhaltsverzeichnis

1 Der Begriff des Grenzwertes

Der Begriff Grenzwert kommt im Alltag vor. Beispiele:

- Beim Radsport gibt es einen Grenzwert für den Anteil roter Blutkörperchen.
- Die Abgase eines Autos dürfen eine gewisse Grenze nicht überschreiten.

Der Alltagsbegriff Grenzwert hat zwar gewisse Parallelen zu demjenigen in der Mathematik, unterscheidet sich aber wesentlich von ihm. Das Vorwissen, welches man zu diesem Begriff mitbringt, sollte also ausgeblendet werden. Das Skript ist in zwei Teile gegliedert, nämlich Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ und Grenzwerte für $x \to x_0$. Das Thema ist begrifflich recht anspruchsvoll, weshalb gewisse Kompromisse auf Kosten der mathematischen Präzision nicht vermieden werden konnten (vor allem wenn es um den Begriff des Grenzwertes selber geht). Auch in der Mathematikgeschichte hat sich dieser Begriff sehr langsam entwickelt, die heute gebrauchte Definition des Grenzwertes wurde erst im 19.Jahrhundert eingeführt.

2 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

2.1 Einführung

Einführungsbeispiele

Beispiel 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

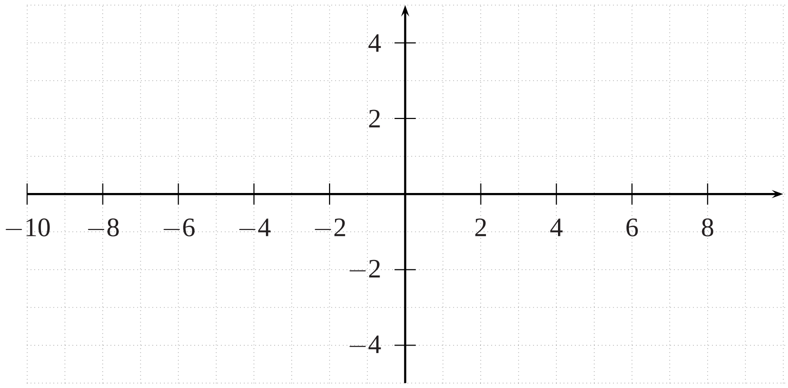
Wir füllen zuerst die untenstehende Tabelle aus:

x	-100000	-10000	-1000	-100	-10	-1	1	10	100	1000	10000	100000
$\frac{1}{x}$		-0.0001		-0.01	-0.1		1	0.1		0.001	0.0001	

Wir beobachten:

Wir wären zum gleichen Ergebnis gekommen, wenn wir den Funktionsgraphen gezeichnet hätten:

x	-8	-4	-3	-2	-1	-0.5	0.5	1	2	3	4	8
$\frac{1}{x}$		-0.25		-0.5			2	1			0.25	0.125



Fragen

- Welche Zahl müssen wir für x einsetzen, damit die Differenz zur Zahl 0 gleich 0.001 ist ?

- Allgemein: Welche Zahl müssen wir für x einsetzen, damit die Differenz zur Zahl 0 gleich d ist ?

Wir stellen fest: Der Funktionswert kann jede vorgegebene Abweichung (auch wenn sie noch so klein ist) von 0 unterschreiten, man muss x nur genügend gross wählen !

Beispiel 2

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x} + 1$.

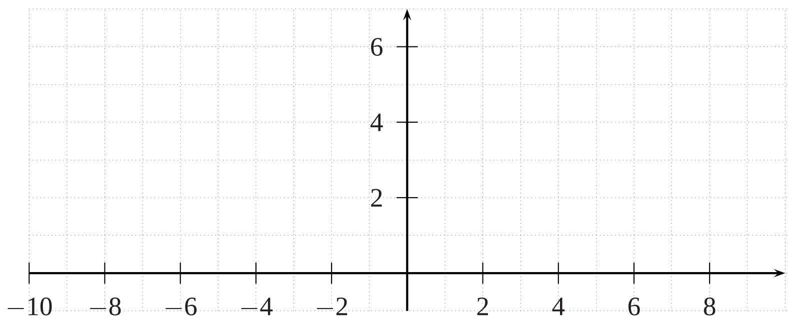
Wir füllen zuerst die untenstehende Tabelle aus:

x	-100000	-10000	-1000	-100	-10	-1	1	10	100	1000	10000	100000
$\dfrac{2x+1}{x}+1$		2.9999		2.99		2	4	3.1		3.001		3.00001

Wir beobachten:

Wir wären zum gleichen Ergebnis gekommen, wenn wir den Funktionsgraphen gezeichnet hätten:

x	-8	-4	-3	-2	-1	-0.5	0.5	1	2	3	4	8
$\dfrac{2x+1}{x}+1$	2.875	2.75		2.5	2	1				3.33	3.25	3.125



Wie hätten wir diese Zahl auch mit Überlegen erhalten können ?

$\rightarrow$

Fragen

- Welche Zahl müssen wir für x einsetzen, damit die Differenz zur Zahl 3 gleich 0.01 ist ?

- Allgemein: Welche Zahl müssen wir für x einsetzen, damit die Differenz zur Zahl 3 gleich d ist ?

Beispiel 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{x^2+1}{4x}$.

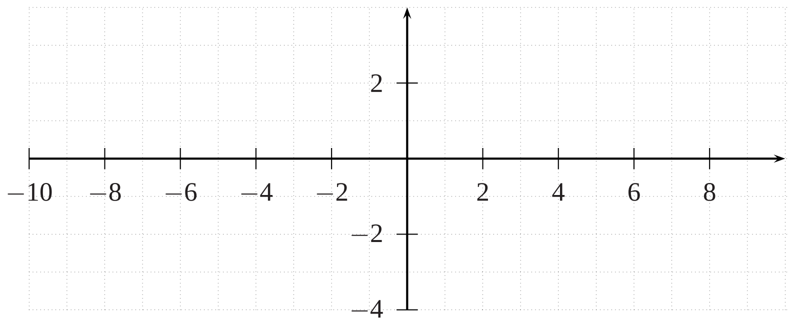
Wir füllen zuerst die untenstehende Tabelle aus:

x	-100000	-10000	-1000	-100	-10	-1	1	10	100	1000	10000	100000
$\dfrac{x^2+1}{4x}$	-25000		-250		-2.525	-0.5		2.525			2500	25000

Wir beobachten:

Wir wären zum gleichen Ergebnis gekommen, wenn wir den Funktionsgraphen gezeichnet hätten:

x	-8	-4	-3	-2	-1	-0.5	0.5	1	2	3	4	8
$\dfrac{x^2+1}{4x}$	-2.03	-1.06		-0.625			0.625	0.5		0.83	1.0625	2.03



Wie wir mit Überlegen auf dieses Ergebnis kommen können ?

$\rightarrow$

Notation:

Bei den Beispielen 1 und 2 sind die Zahlen 0 bzw. 3 wie Grenzen, denen wir uns immer mehr annähern, je grösser bzw. kleiner x wird. Wir werden immer ein x so finden, dass eine beliebige vorgegebene Differenz unterschritten wird. Eine solche Zahl wird als Grenzwert (Symbol:lim) von f für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ bezeichnet. Wir sind wir immer mehr gegen +Unendlich ($x \to \infty$) bzw. gegen -Unendlich ($x \to -\infty$) gegangen. Wir schauen uns nun die Notation für Beispiel 1 an für den Fall $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Übersetzen wir den Ausdruck in Worte:

- $x \to \infty$: Wir streben mit x gegen Unendlich.
- lim: Wir wollen wissen, zu welcher Zahl die Differenz beliebig klein wird, je weiter wir ins Unendliche gehen.

Bei Beispiel 3 existiert der Grenzwert für $x \to \pm\infty$ nicht. Wir notieren dies folgendermassen:

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{4x} = \infty$ (weil der Graph immer mehr ins Positive geht)
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{4x} = -\infty$ (weil der Graph immer mehr ins Negative geht)

Übungen

1. Berechne die untenstehenden Grenzwerte, indem Du zuerst Zahlen einsetzt (wie bei den Einführungsbeispielen). Überprüfe nachher Dein Ergebnis, indem Du den Graphen skizzierst.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x}$

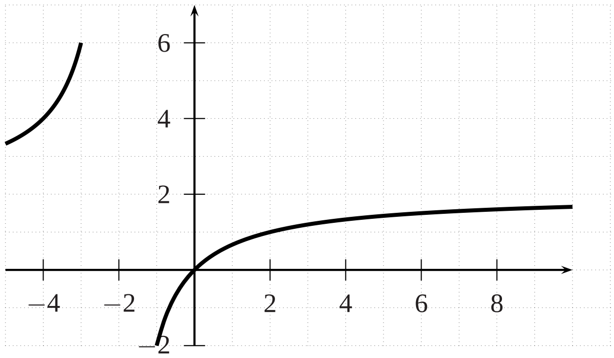
   c) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{x}$

2. Berechne die untenstehenden Grenzwerte mit Testeinsetzungen:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x^2}$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x-1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{x}$

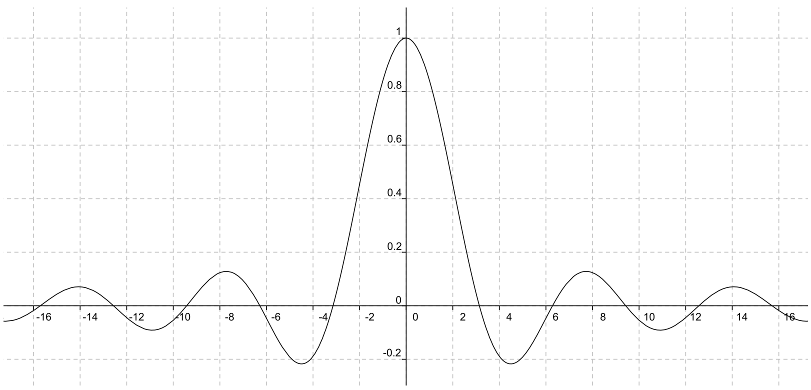
3. Für die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$. Der Graph ist auf der untenstehenden Abbildung zu sehen.



   a) Welche Zahl muss für x eingesetzt werden, damit die Differenz zum Grenzwert 2 0.1 beträgt (d.h. $2 - f(x) = 0.1$) ?
   b) Welche Zahl muss für x eingesetzt werden, damit die Differenz zum Grenzwert 2 0.01 beträgt (d.h. $2 - f(x) = 0.01$) ?
   c) Welche Zahl muss für x eingesetzt werden, damit die Differenz zum Grenzwert 2 ε beträgt, wobei $\varepsilon > 0$ ist (d.h. $2 - f(x) = \varepsilon$) ?

4. Auf dem untenstehenden Graphen ist die Funktion $\sin(x)/x$ zu sehen. Bestimme mit Hilfe des Graphen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$



5. Berechne die nachfolgenden Grenzwert mit Hilfe von Testeinsetzungen.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - 1}{x}$
   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - 1}{x}$

6. Wir wollen nun den nachfolgenden Satz vorbereiten. Ermittle mit Überlegen die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^3}$

Wir halten obige Erkenntnis fest:

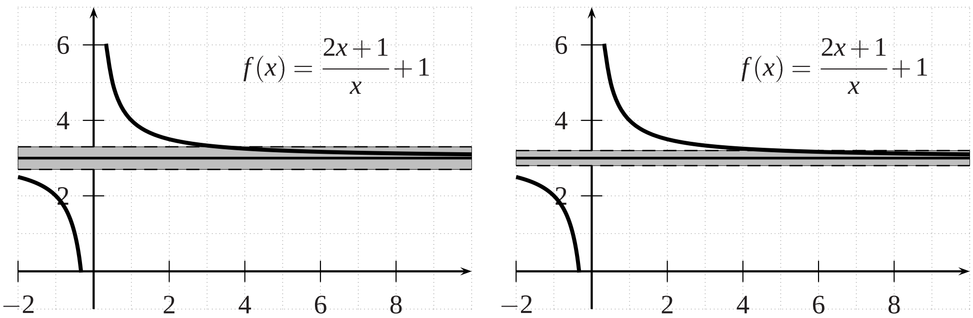
Satz 1 *Gegeben sei eine Funktion f, deren Vorschrift die Form $f(x) = \frac{c}{x^n}(c \in \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N})$ hat. Es gilt:*

Beweis: Wir beweisen den Fall $c > 0$:

Wir wollen jetzt zur Definition des Grenzwertes kommen. In den obigen Einführungsbeispielen und in den nachfolgenden Übungen wurden die Überlegungen schon angeschnitten.

In Worten will man folgendes sagen: „Wenn eine Zahl g ein Grenzwert einer Funktion f sein soll, gilt folgendes:

- $x \to \infty$: Egal wie schmal ich den Streifen um den Grenzwert wähle, ich werde immer eine Zahl x_0 so finden, dass für alle $x > x_0$ der Graph im Streifen drin ist."

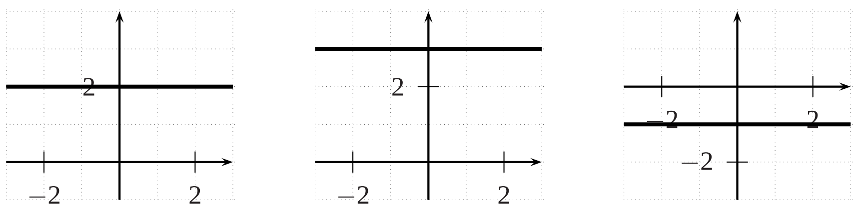


- $x \to -\infty$: Egal, wie schmal ich den Streifen um den Grenzwert wähle, ich werde immer eine Zahl x_0 so finden, dass für alle $x < x_0$ der Graph im Streifen drin ist."

Mathematisch ausgedrückt (die Definition ist ein bisschen anschaulicher als üblich angegeben zur besseren Verständlichkeit):

Definition 1 *Gegeben sei eine Funktion f. $g \in \boldsymbol{R}$ heisst Grenzwert von f für $x \to \infty$ (Notation: $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$), wenn es für jeden auch noch so schmalen Streifen um g es eine Zahl $x_0 \in \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{D}$ = Definitionsmenge) so gibt, dass gilt: $|f(x) - g| < \varepsilon$, wenn $x > x_0$.*

Zum Schluss des Abschnittes betrachten wir noch die konstante Funktion:



Nehmen wir zum Beispiel den ersten Graphen mit $f(x) = 2$. Von welcher Zahl unterscheiden sich die Funktionswerte beliebig wenig, wenn wir immer weiter nach ∞ bzw. $-\infty$ gehen ? Beide Male lautet die Antwort: 2. Der Grenzwert ist also gerade die Vorschrift selber. Wir halten fest:

Satz 2 *Für die konstante Funktion f mit $f(x) = c\,(c \in \boldsymbol{R})$ gilt:*

2.2 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ bei gebrochen rationalen Funktionen

Zuerst lernen wir eine neue Sorte von Funktionen kennen, die **gebrochen rationalen Funktionen**. **Beispiele**:

- $f(x) = \dfrac{2x^2 + 0.5x - 1}{-5x + 3}$
- $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

Bemerkungen

- Die Exponenten sind immer natürliche Zahlen. Damit sind die z.B. die folgende Funktion keine gebrochen rationale Funktion:

  $$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

- Die Zahlen vor den Potenzen heissen Koeffizienten (beim ersten Beispiel sind dies 2,0.5,-1,-5 und 3).

Die Definition:

Definition 2 *Eine Funktion heisst **gebrochen rationale Funktion**, wenn ihre Vorschrift folgende Form hat:*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

*wobei $m, n \in \boldsymbol{N}$ und $a_n, b_m \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ und $a_i, b_j \in \boldsymbol{R}$, falls $i \neq n$ und $j \neq m$. a_i, b_j heissen **Koeffizienten**.*

Gebrochen rationale Funktionen eignen sich für Grenzwertbetrachtungen besonders gut. Wir versuchen mit Hilfe der nachfolgenden Einführungsaufgabe selber herauszufinden, wie man die Grenzwerte ausrechnen kann.

Einführungsaufgabe: Finde die folgenden Grenzwerte mit Überlegen

- - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-4}$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x^2-4}$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^3-4}$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x^2-4}$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{x^2-4}$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x^3-4}$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{x-4}$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^2+2}{5x^2-4}$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+2}{5x^2-4}$
- Kannst Du mit Hilfe der obigen Aufgaben Gesetzmässigkeiten formulieren ?

Übung

7. Berechne die folgenden Grenzwerte, ohne den Graphen zu zeichnen und ohne Testeinsetzungen zu machen.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+7}{4x-8}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+7}{4x-8}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2+8}{3x^2-2x}$

   d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^2+8}{3x^2-2x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+7}{x-8}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+7}{x-8}$

   g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^3+x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^3+x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{9x^2+1}{x^2}}$

   j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{3x^4+x^3}}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x-1}-\sqrt{x})$

8. Bestimme den Grenzwert des Ausdrucks

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n - 1}{b_m x^m - 1}$$

a) falls $n > m$ b) falls $n = m$ c) falls $n < m$

2.3 Die Grenzwertsätze

In diesem Abschnitt lernen wir als Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt die Grenzwertsätze kennen. Wir steigen wieder ein mit einer Einführungsaufgabe.

Einführungsaufgabe

- Schätze die folgenden fünf Ausdrücke ab, indem Du eine grosse Zahl einsetzt.
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{x} + \frac{x-1}{2x+3} \right) =$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{x} - \frac{x-1}{2x+3} \right) =$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{x} \cdot \frac{x-1}{2x+3} \right) =$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{x} : \frac{x-1}{2x+3} \right) =$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 \cdot \frac{2x+1}{x} \right) =$
- Überlege: Hättest Du den Grenzwert auch auf einem anderen Weg bestimmen können ?

Satz 3 *Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, wobei $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = b$ $(b \neq 0)$ endliche Zahlen sind. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)+g(x)) &= \ldots.. \\
\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-g(x)) &= \ldots.. \\
\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)\cdot g(x)) &= \ldots.. \\
\lim_{x\to\pm\infty} (f(x):g(x)) &= \ldots.. \\
c \in \boldsymbol{R}: \lim_{x\to\pm\infty} (c\cdot f(x)) &= \ldots..
\end{aligned}$$

Übung

9. Berechne die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Grenzwertsätze.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{-2x^2+1}-\frac{x}{x+1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\frac{-2x^2}{x^2+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{-2x^2+1}:\frac{2x}{x+1}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3\cdot\frac{2x}{x+1}\right)$

2.4 Der „Divisionstrick“

Wir sind mit unserem Wissen in der Lage, Grenzwerte herauszufinden. Wir kennen drei Methoden:

- Eine sehr grosse Zahl einsetzen und schauen, was herauskommt.
- Den Graphen skizzieren und aufgrund des Verlaufs den Grenzwert bestimmen.
- Den Grenzwert bestimmen mit Hilfe der Gesetzmässigkeit, die wir bei der Einführungsaufgabe auf Seite 8 herausgefunden haben.

Alle drei Methoden sind aus mathematischer Sicht unbefriedigend, weil es sich nur um Abschätzungen handelt. Deshalb lernen wir in diesem Abschnitt noch eine präzisere Methode kennen.

Noch einmal die Sätze 1 und 2:

- (Satz 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0\ (n\in\mathbf{N}, c\in\mathbf{R})$
- (Satz 2) $\lim\limits_{x\to\infty}c=c(c\in\mathbf{R})$

Gesucht ist nun der folgende Grenzwert, der mit Hilfe von Umformungen, den Grenzwertsätzen und den Sätzen 1 und 2 berechnet werden soll:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+x-4}{x^3+x^2-x+1}=$$

Übungen

10. Berechne die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von Umformungen, den Grenzwertsätzen und den Sätzen 1 und 2.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2+8}{3x^2-2x} =$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x}{(x-2)^2} =$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x}{x^3-x^2+1} =$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^3+8}{x^2-1} =$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x}{-x^3-x} =$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} =$

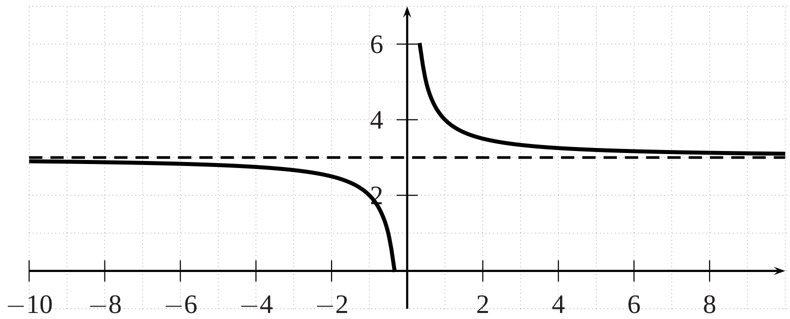
2.5 horizontale Asymptoten

Beträgt der Grenzwert für $x \to \infty$ z.B. 5, dann kommt der Graph der Zahl 5 immer näher, erreicht sie aber nie ganz. 5 ist wie eine Barriere, die der Graph nie durchbrechen kann. Diese Barriere können wir mit einer Geraden darstellen, die wir **Asymptote** nennen. Unten ist eine anschauliche Definition der Asymptote angegeben.

Definition 3 *horizontale Asymptoten sind Geraden der Form $y = n\,(n \in \boldsymbol{R})$, an die sich der Graph einer Funktion „anschmiegt“ für $x \to \pm\infty$.*

Wir betrachten noch einmal **Beispiel 2**:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x} + 1$.



Die gestrichelte Gerade ist eine horizontale Asymptote (Asymptote, weil sich der Graph an sie anschmiegt, horizontal weil die Steigung 0 beträgt). Wir wissen, dass eine Gerade die Form $y = mx + n$ hat und dass m für die Steigung und n für die Schnitthöhe mit der y-Achse steht. Wir erhalten also für unser Beispiel:

Übungen

11. Gib die Geradengleichungen der zur Funktion f gehörenden Asymptoten an:

a) $f(x) = \frac{2x+7}{4x-8}$ b) $f(x) = \frac{4}{3x^2}$ c) $f(x) = \frac{2}{3x-4}$

d) $f(x) = \frac{5x^2+8}{3x^2-2x}$ e) $f(x) = \frac{2x^2-3x}{(x-2)^2}$ f) $f(x) = \frac{1-2x^2}{x+1}$

3 Grenzwerte für $x \to x_0$

3.1 Einführung

Beim oberen Abschnitt ist x gegen unendlich bzw. gegen -unendlich gegangen. In diesem Abschnitt geht es um die Frage, wie sich der Graph verhält, wenn wir uns einer bestimmten endlichen Zahl immer mehr annähern.

Einführungsbeispiel

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbf{R}\backslash\{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Fülle die folgenden beiden Tabellen aus:

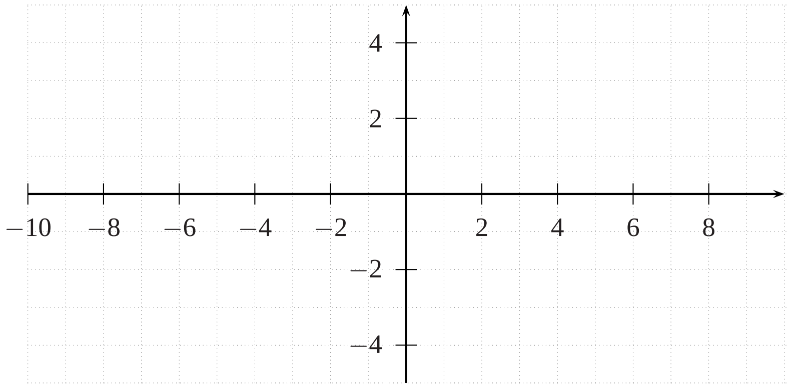
x	3.9	3.99	3.999	3.9999	3.99999
$\frac{1}{x-2}$					

x	4.1	4.01	4.001	4.0001	4.00001
$\frac{1}{x-2}$					

Fragen

- In beiden Fällen nähern wir uns immer mehr der Zahl 0.5. Kann diese Zahl auch rechnerisch ermittelt werden ?

- Beantworte mit Hilfe des Funktionsgraphen (zeichne ihn ins untenstehende Koordinatensystem): Was erhalten wir, wenn wir uns der Zahl 2 auf der x-Achse immer mehr annähern (von links und von rechts) ?



- Beantworte mit Hilfe des Funktionsgraphen: „Wenn wir uns auf der x-Achse der Zahl 1 immer mehr annähern (von links und von rechts), nähert sich dann auch der Graph einer bestimmten Zahl immer mehr an ?“Wenn ja, welcher ?

Wir fassen zusammen:

- Die Zahl, zu der die Differenz der **Funktionswerte** (nicht der x-Werte) immer mehr gegen Null geht, bezeichnen wir als Grenzwert.
- Einen Grenzwert können wir offenbar ausrechnen, indem wir den x-Wert, dem wir uns annähern, in die Funktionsvorschrift einsetzen (wenn dieser x-Wert in der Definitionsmenge liegt). Wir können allerdings nicht sicher sein ob das immer funktioniert, wir haben das einfach bei unserem Beispiel so beobachtet (Lehrerantwort darauf: bei unseren Funktionstypen funktioniert dieses Verfahren immer, es gibt aber Funktionen, wo das nicht der Fall ist).
- Es gibt nicht immer einen Grenzwert. Kritische Stellen sind immer Definitionslücken (x-Werte, die man nicht in die Vorschrift einsetzen darf)

Zur Notation:

- Tabelle 1:
  - Auf der x-Achse kommen wir der Zahl 2 von links her immer näher. Wir notieren: $x \to 2^-$ (linksseitiger Grenzwert).
  - Wir wollen den Grenzwert ermitteln $\to$ wir notieren: lim
  - Wir haben es mit der Funktionsvorschrift $f(x) = \frac{1}{x-2}$ zu tun $\to$ wir notieren: $\frac{1}{x-2}$
  - Zusammengefasst: $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2}$

  - Übersetzt in Worten: „Wenn wir uns der Zahl $x = 2$ von links her immer mehr annähern, kommen wir dann einer bestimmten Zahl immer näher “?

- Tabelle 2: Analog zu Tabelle 1, wir notieren: $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}$

- Die linksseitige und die rechtsseitige Annäherung wird mit $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$ notiert. Hier sind zwei Grenzwerte enthalten. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$ existiert nur wenn sowohl $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}$ und $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2}$ existieren und dazu auch noch gleich sind !

Übertragen wir den obigen Inhalt auf unser Einführungsbeispiel:

- $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{1}{x-2} =$

- $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{1}{x-2} =$

- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{x-2} =$

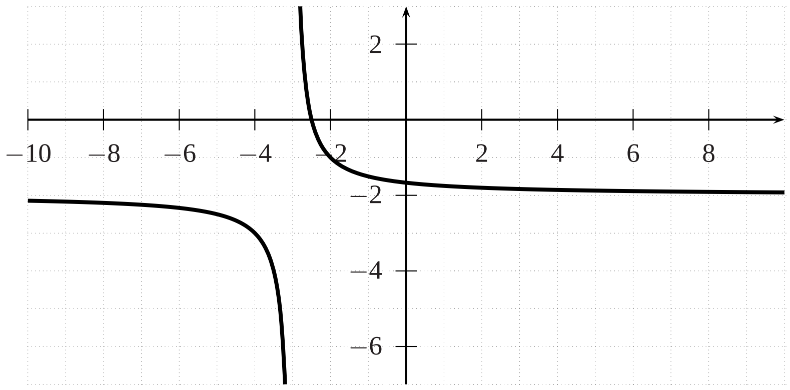
- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} =$

- $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} =$

- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} =$

Übungen

12. Ermittle mit Hilfe des Funktionsgraphen (s.unten) mit $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 2$ die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren.



a) $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{1}{x+3} - 2$ b) $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{1}{x+3} - 2$ c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x+3} - 2$

13. Ermittle mit Hilfe von Testeinsetzungen die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren (bei g,h und i ist mit *e* die Eulersche Zahl gemeint).

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2^x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{2^x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2^x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin(x)}{x}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x}$ h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - 1}{x}$ i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

j) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$ k) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$ l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

3.2 Pole

Zuerst lernen wir ein Hilfsmittel kennen, die **Polynomdivision**.

Beispiel: $(x^3+2x^2-x-2):(x+1)=$

Übung

14. Berechne die folgenden Ausdrücke.

    a) $(x^3+4x^2+x-6):(x+3)=$ $[x^2+x-2]$ b) $(x^3-7x-6):(x-3)=$ $[x^2+3x+2]$

15. Setze bei den Dividenden die Zahlen -3 (12a)) bzw. 3 (12b)) ein. Was beobachtest Du ?

Satz 4 *Ist x_0 eine Nullstelle des Polynoms $P(x)$, dann lässt sich der Faktor $(x-x_0)$ abspalten, d.h.:*

Übung

16. -1 ist eine Nullstelle des Zählers von a) und 2 ist eine Nullstelle des Zählers von b). Prüfe das und vereinfache dann die Brüche.

    a) $\dfrac{x^3+3x^2-6x-8}{x+1}=$ b) $\dfrac{2x^3+x^2-7x-6}{x-2}=$

Nun zu den Polen. Anschaulich gesprochen sind Pole senkrechte Asymptoten. Die mathematische Definition:

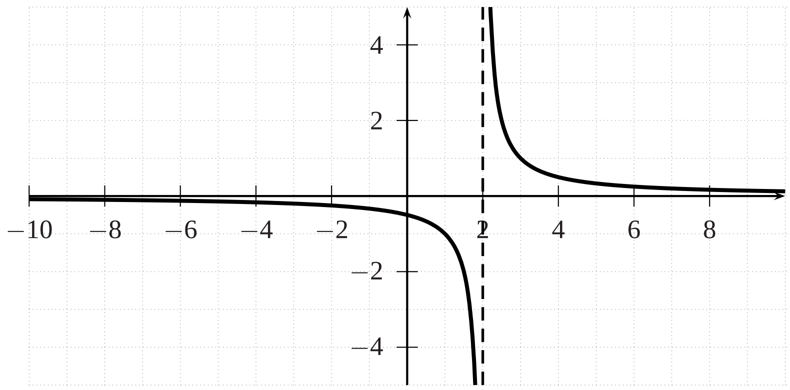
Definition 4 *Eine Funktion f hat an einer Stelle x_0 genau dann eine Polstelle, wenn gilt:*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$$

Beispiel

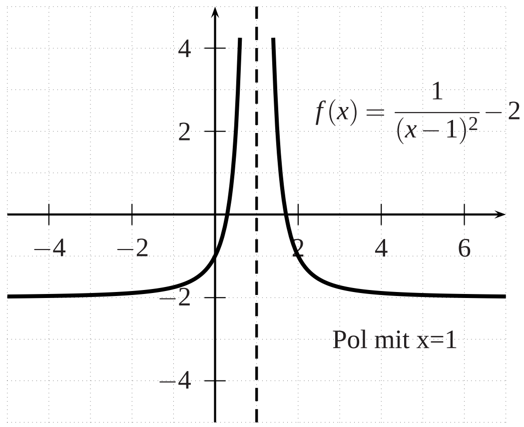
Wir haben bei einem der Einführungsbeispiele bereits einen Pol angetroffen:

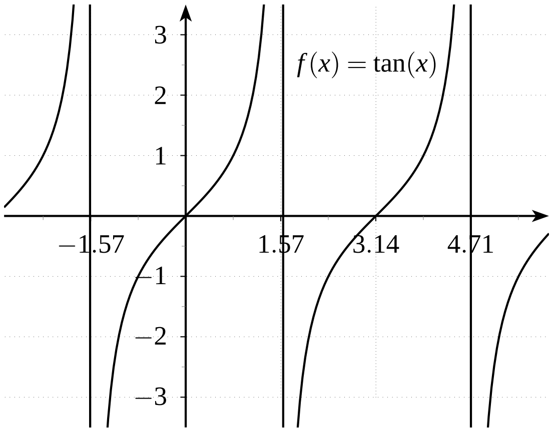
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbf{R}\backslash\{2\} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.



Der Pol ist an der Stelle $x = 2$

Auf der unteren linken Abbildung sehen wir ein Beispiel dafür, dass bei einem Pol der Funktionsgraph nicht gezwungenermassen nach unten und nach oben gehen muss. Auf der rechten Seite sehen wir die bereits bei den trigonometrischen Funktionen behandelte Tangensfunktion, die unendlich viele Pole hat.





Wie können wir die Polstellen berechnen ?

- Wir schauen, für welche x wir im Nenner eines Bruches 0 erhalten. So erhalten wir die **Kandidaten** (wir können noch nicht sicher sein, dass es sich um Polstellen handelt).
- Um zu prüfen, ob es sich wirklich um Polstellen handelt, gehen wir folgendermassen vor:

Beispiele

- $y = \dfrac{x^2 + 3x}{(x+3)(x+4)}$

- $y = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}{(x-5)(x+1)}$

- $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 3x + 4} =$

Übungen

17. Gesucht sind die Polstellen der untenstehenden Funktionen. Ermittle zuerst die Kandidaten und prüfe nachher, ob es sich an diesen Stellen um Pole handelt.

a) $f(x) = \dfrac{x-4}{(x+3)(x-4)}$

b) $f(x) = \dfrac{(x-4)(x+3)}{(x-4)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^3+2x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^4-x^3-28x^2-9x+36}{(x+2)(x-4)}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}{(x-1)(x+1)^2}$

3.3 Hebbare Definitionslücken

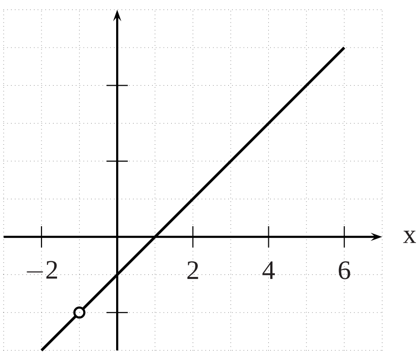
Im obigen Abschnitt haben wir gelernt, dass wir bloss die Zahl, der wir uns auf der x-Achse nähern, in die Funktionsvorschrift einsetzen müssen, um den Grenzwert zu erhalten. Wir haben auch gelernt, dass dies nicht immer möglich ist, nämlich dann nicht, wenn die Zahl nicht in der Definitionsmenge liegt. Wenn das der Fall ist, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder es existiert kein Grenzwert oder wir müssen noch zusätzliche Arbeit leisten, um den Grenzwert zu ermitteln.

Betrachten wir folgendes Beispiel:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

Wenn wir -1 in die Funktionsvorschrift einsetzen, erhalten wir: $\dfrac{0^2}{0}$, einen undefinierten („unerlaubten“) Ausdruck ! -1 gehört also nicht zur Definitionsmenge, ist eine **Definitionslücke**.

Schauen wir uns mal den Funktionsgraphen an:



Der Graph ist eine Gerade mit einem „Loch“. Anschaulich erhalten wir für den Grenzwert einfach -2.

Frage: Wie aber können wir diesen Grenzwert rechnerisch ermitteln ?

Antwort:

Merke: Entsteht durch das Einsetzen der angenäherten Stelle x_0 ein unbestimmer Ausdruck, dann versuche den Term umzuformen !

Definition 5 *Ist eine Funktion f an einer Stelle x_0 nicht definiert und gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} = r(r \in \boldsymbol{R})$, dann ist an der Stelle x_0 eine* ***hebbare Definitionslücke****.*

Übungen

18. Berechne die untenstehenden Grenzwerte mit Hilfe von Termumformungen. Bestimme bei a) und b) die Koordinaten des Lochs bei der Definitionslücke.

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ [10,(5|10)]

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^2 - 27}{x - 3}$ [18,(3|18)]

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$ [2]

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x + 2}$ [-32]

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 + x)^2 - 4)}{x}$ [4]

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$ [-0.25]

3.4 Diskussion von gebrochen rationalen Funktionen

Einführungsaufgabe Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + x - 6}$. Bestimme die Definitionsmenge, die Nullstellen, die Art der Definitionslücke, bei den hebbaren Definitionslücken die Koordinaten des „Lochs“, bei den Polstellen den links- und rechtsseitigen Grenzwert und die Grenzwerte für $x \to \infty$ sowie für $x \to -\infty$.

Übungen

19. Bestimme für die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - x - 6}$ die Definitionsmenge. Bestimme weiter, ob es sich bei den Definitionslücken um hebbare Definitionslücken oder um Polstellen handelt. Berechne bei den hebbaren Definitionslücken die Koordinaten des „Lochs“und bei den Polstellen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

20. Bestimme für die Funktion $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 3x - 4}$ die Definitionsmenge, alle Nullstellen, die Art der Definitionslücken, „Löcher“, links- und rechtsseitige Grenzwerte, Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.