3.7 Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Inhaltsverzeichnis

1 bedingte Wahrscheinlichkeiten

Einführungsbeispiel

Ein fairer Würfel mit den Augenzahlen von 1-6 werde verdeckt geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

- dass eine gerade Zahl geworfen wurde, wenn einem mitgeteilt wird, dass die gewürfelte Zahl > 3 ist ?

Wir haben hier jeweils eine Zusatzinformation erhalten. In diesem Falle spricht man von einer bedingten Wahrscheinlichkeit. Wir notieren diesen Sachverhalt folgendermassen:

$P_{\text{die gewürfelte Zahl ist gerade}}(\text{eine gerade Zahl wurde gewürfelt}) = P(\text{eine gerade Zahl wurde gewürfelt}|\text{die gewürfelte Zahl ist gera}$

Wenn wir die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer zusätzlichen Information berechnen, dann sprechen wir von einer **bedingten Wahrscheinlichkeit**.

Allgemeine Definition:

Definition 1 *Seien A und B Ereignisse. Dann definieren wir die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ folgendermassen:*

Bemerkung:

- Häufig trifft man in der Literatur auch die Schreibweise $P(B|A)$ (entspricht $P_A(B)$).
- Gelesen wird der Ausdruck: „P von A unter B “.

Beispiel

Aus einem Jasskartenspiel mit 36 Karten werden zwei Karten nacheinander gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Karten Buben sind bzw. dass beide Karten keine Buben sind ?

Übungen

1. Eine Urne enthält 5 rote und 4 schwarze Kugeln. Es werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür,
   a) dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste Kugel bereits rot war ? [$\frac{1}{2}$]
   b) dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste Kugel schwarz war ? [$\frac{5}{8}$]
   c) dass beide gezogene Kugeln rot sind ? [$\frac{5}{18}$]
2. Eine Schachtel enthält 15 Pralinen, davon 3 mit Marzipanfüllung. Peter nimmt zwei Pralinen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt er zwei Marzipanpralinen ? [$\frac{1}{35}$]
3. Otto hat fünf Schlüssel in seiner Hosentasche. Er zieht blindlings einen nach dem anderen, um in seine Wohnung zu gelangen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,
   a) dass er beim zweiten Griff den richtigen Schlüssel zieht, wenn der erste Griff ein falscher war ? [0.25]
   b) dass er den richtigen Schlüssel beim zweiten Griff zieht ? [0.2]
4. 40% der Mitarbeiter einer Firma sind Raucher. 30% der Raucher treiben Sport. Unter den Nichtrauchern beträgt der Anteil der Sportler 45%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger Mitarbeiter
   a) Sport treibt und Nichtraucher ist ? [0.27]
   b) keinen Sport treibt und Raucher ist ? [0.28]
5. Eine Urne enthält schwarze und rote Kugeln (Anzahl unbekannt). Nachdem eine Kugel aus der Urne gezogen wurde und ihre Farbe festgestellt wurde, wird sie in die Urne zurückgelegt. Danach werden die Kugeln der anderen Farbe verdoppelt und es wird erneut eine Kugel gezogen.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Kugel rot und die zweite Kugel schwarz ? Unter welcher Bedingung ist diese Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{3}$?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kugeln rot ? Unter welcher Bedingung ist diese Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{10}$?

2 unabhängige Ereignisse

Beispiel 1

Aus einer Urne mit 4 weissen und 6 schwarzen Kugeln werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wir definieren die Ereignisse: A: Beim ersten Griff wird eine weisse Kugel gezogen, B: beim zweiten Griff wird eine weisse Kugel gezogen. Berechne $P_A(B)$ und $P(B)$.

Beispiel 2

Ein Würfel wird zweimal geworfen. A_5 sei das Ereignis, dass die Augensumme 5 und A_8 sei das Ereignis, dass die Augensumme 8 erzielt wird. B sei das Ereignis, dass im ersten Wurf eine Primzahl fällt. Berechne $P_{A_5}(B), P_{A_8}(B)$ und $P(B)$. Was fällt Dir auf ?

Durch das Eintreten eines bestimmten Ereignisses B kann sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines weiteren Ereignisses A ändern. Ist das der Fall, so werden A und B als **abhängige Ereignisse** bezeichnet. Ändert sich die Wahrscheinlichkeit von A durch das Eintreten von B jedoch nicht, so heissen A und B **unabhängige Ereignisse**.

Definition 2 *Ereignisse A und B mit positiven Wahrscheinlichkeiten werden als* ***stochastisch unabhängig*** *voneinander bezeichnet, wenn* $P_B(A) = P(A)$ *bzw.* $P_A(B) = P(B)$ *gilt.*

Übungen

6. Prüfe die Ereignisse A und B auf stochastische Unabhängigkeit.
   a) Ein Würfel wird zweimal geworfen. A sei das Ereignis, dass im zweiten Wurf eine 1 fällt. B sei das Ereignis, dass die Augensumme 5 beträgt. [abh.]
   b) Ein Würfel wird zweimal geworfen. A: Augensumme 6, B: Gleiche Augenzahl in beiden Würfen. [abh.]
7. Eine Schule wird von 1036 Schülern besucht, 560 Jungen und 476 Mädchen. 125 Jungen und 105 Mädchen tragen eine Brille.
   a) Hängt das Sehvermögen der Kinder vom Geschlecht ab ? [unabh.]
   b) Eine Umfrage unter den Eltern der Schüler aus letztem Beispiel ergibt, dass bei 213 Kindern beide Elternteile Brillenträger sind. In 70 dieser Fälle trägt das Kind ebenfalls eine Brille. Ist das Sehvermögen der Kinder von dem der Eltern abhängig ? [abh.]
8. In einer grossen Ferienanlage wohnen 738 Familien. 462 Familien sind mit dem PKW angereist, die restlichen mit dem Zug. Von den 396 Familien mit zwei oder mehr Kindern reisten 121 mit dem Zug. Ist das zur Anreise benutzte Verkehrsmittel von der Kinderzahl abhängig ? [abh.]
9. Der englische Naturforscher Sir Francis Galton (1822-1911) untersuchte den Zusammenhang zwischen der Augenfarbe von 1000 Vätern und je einem ihrer Söhne. Die Ergebnisse sind in einer Vierfeldertafel dargestellt. Dabei sei V das Ereignis „Vater ist helläugig“ , S das Ereignis „Sohn ist helläugig“. Untersuche V und S auf Unabhängigkeit. [abh.]

	S	$\bar{S}$
V	471	151
$\bar{V}$	148	230

10. In einer empirischen Untersuchung wird geprüft, ob ein Zusammenhang zwischen blonden Haaren und blauen Augen bzw. blonden Haaren und dem Geschlecht besteht. Von 842 untersuchten Personen hatten 314 blonde Haare. Unter den 268 Blauäugigen waren 121 Blonde. 116 von 310 Mädchen waren blond. Überprüfe die untersuchten Zusammenhänge rechnerisch. [abh./unabh.]

3 mehrstufige Zufallsversuche

Definition 3 *Denkt man sich mindestens zwei Versuche, die man nacheinander oder auch gleichzeitig durchführen kann, zu einem Versuch zusammengefasst, so nennt man dies einen* ***zusammengesetzten Versuch****.*

Beispiele

- Ein(e) Würfel/Münze/Glücksrad wird dreimal nacheinander geworfen(gedreht).
- Eine Münze wird geworfen, anschliessend wird ein Würfel geworfen.

Mehrstufige Zufallsversuche lassen sich mit sogenannten Baumdiagrammen darstellen: Als Beispiel nehmen wir einen fairen Würfel der dreimal nacheinander geworfen wird. Da wir unbedingt eine sechs benötigen (z.B. um ein Spiel zu beenden), schauen wir nur darauf, ob eine sechs eintrifft oder ob keine 6 eintrifft.

Bei Baumdiagrammen gelten zwei grundlegende Regeln:

Folgendermassen können wir kontrollieren, ob wir die Wahrscheinlichkeiten richtig ausgerechnet haben:

Übungen

11. Eine gezinkte Münze (P(W)=0.4, P(Z)=0.6) wird zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

    a) genau 2 mal Wappen [0.16] b) höchstens 1 mal Wappen [0.84]

12. Bei einem Multiple-Choise-Test mit 3 Fragen kann man bei jeder Frage zwischen 4 Antworten wählen, wobei genau eine Antwort richtig ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mit vollständigem Raten

    a) genau 2 Antworten richtig hat ? [≈ 0.14]
    b) nur eine Antwort richtig hat ? [≈ 0.42]
    c) mindestens eine Antwort richtig hat ? [≈ 0.58]

13. Bei einer Produktionskontrolle werden in drei Prüfungsgängen Länge, Breite und Höhe eines Metallstücks geprüft. Diese sind mit den Wahrscheinlichkeiten 0.2 (Länge), 0.1 (Breite) und 0.15 (Höhe) ausserhalb der vorgegebenen Toleranzgrenzen. Ein Metallstück wird nicht ausgeliefert, wenn mindestens zwei der Kontrollen negativ ausgehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein kontrolliertes Stück Ausschussware ? [0.059]

14. Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie müssen die Wahrscheinlichkeiten für Kopf und Zahl gewählt werden, damit gilt:

    a) P(genau 2 Mal Zahl) = 0.36 ? [0.6]
    b) P(genau 1 Mal Kopf) = 0.32 ? [P(K)=0.2,P(Z)=0.8 oder P(K)=0.8,P(Z)=0.2]

15. In Überraschungseiern hat es in jedem 6.Ei ein Spielzeugauto, in 75% der Eier eine Comicfigur und in den restlichen Eiern ein Plastiktier.

    a) Caroline kauft drei Eier Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie
        i) genau 3 Comicfiguren unter den Eiern hat ? [0.42]
        ii) mindestens ein Plastiktier unter den Eiern hat ? [0.23]
        iii) genau ein Spielzeugauto, ein Plastiktier und eine Comicfigur unter den Eiern hat ? [0.06]
    b) Manuela kauft zwei Überraschungseier. Wie müssen die Wahrscheinlichkeiten für die Comicfiguren und die Plastiktiere verändert werden, so dass sie mit 25% Wahrscheinlichkeit genau 1 Plastiktier erhält ? [Comicfigur: 0.69; Plastiktier: 0.15]

16. Spieler A und Spieler B haben je eine Drehscheibe mit drei Ziffern: A hat die Ziffern 1,4 und 5 und mit den Wahrscheinlichkeiten von 2/6, 3/6 und 1/6 bleibt die Drehscheibe auf den entsprechenden Ziffern stehen. B hat die Ziffern 2,3 und 6 auf seiner Drehscheibe mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten von 4/7, 1/7 und 2/7. Gewinner ist derjenige, dessen Drehscheibe bei der höheren Ziffer stehen bleibt. Beide Spieler drehen das Rad. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt ? [0.476]

17. Bei einem Spiel wirfst Du zuerst eine ideale Münze. Erscheint Kopf, so wirfst Du ein kleines Schweinchen aus Kunststoff. Das Schwein landet mit 60% Wahrscheinlichkeit auf der Seite und Du gewinnst 1 Franken. Landet das Schwein auf den Beinen (Wahrscheinlichkeit 30%), so gewinnst Du 2 Franken und landet das Schwein auf dem Rüssel (Wahrscheinlichkeit 10%), so gewinnst Du sogar 4 Franken.

    Erscheint jedoch Zahl, so ziehst Du hintereinander und ohne Zurücklegen zwei Zettel aus einem Sack. Im Sack befinden sich sechs Zettel, einer mit Ziffer 0, zwei mit Ziffer 1 und drei mit der Ziffer 2 darauf. Du verlierst nun soviele Franken, wie das Produkt der beiden Ziffern beträgt.

    Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Du einen Verlust beim Spiel machst? [1/3]

18. Es liegen zwei Urnen A und B vor, wobei sich in der Urne A 2 rote und 5 blaue Kugeln befinden, während sich in der Urne B 3 rote und 7 blaue Kugeln befinden. Es wird nun eine Kugel aus einer der beiden Urnen gezogen (es ist gleichwahrscheinlich, dass aus A oder B gezogen wird). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel aus der Urne A gezogen wurde, wenn die Farbe blau ist ? [0.51]

19. Ein Lügendetektor wird zur Aufklärung eines Verbrechens eingesetzt. Mit einer Zuverlässigkeit von 90% wird eine effektiv Schuldiger durch den Detektor als schuldig erkannt und mit einer Zuverlässigkeit von 99% wird ein Unschuldiger durch den Detektor als unschuldig erkannt. Die Polizei verdächtigt insgesamt 20 Personen, wobei nur eine der Personen der Täter sein kann. Es wird nun zufällig einer der Verdächtigen ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er unschuldig, obwohl er vom Lügendetektor als schuldig ausgewiesen worden ist ? [0.17]

20. Auf einem Strassenfest wird folgendes Kartenspiel angeboten: Der Spielleiter präsentiert 3 Karten mit folgenden Bezeichnungen:

Karte	Vorderseite	Rückseite
1	0	0
2	1	1
3	0	1

    Es wird nun blindlings eine Karte gezogen, von der man nur eine Seite zieht. Der Spielleiter wettet nun 10 Fr. darauf, dass bei der gezogenen Karte auf beiden Seiten die gleiche Zahl steht ? Nimmst Du die Wette an, wenn Du auch 10 Fr. einsetzen musst ? Wenn nein, mit welchem Einsatz würdest Du gegen die 10 Fr. des Spielleiters antreten ?

21. (Das Ziegenproblem) Bei einer Spielshow kann der Kandidat ein Auto gewinnen. Dem Spiel liegen die folgenden Regeln zugrunde:

    - 1.Ein Auto und zwei Ziegen werden zufällig auf drei Tore verteilt.
    - 2.Zu Beginn des Spiels sind alle Tore verschlossen, sodass Auto und Ziegen nicht sichtbar sind.
    - 3. Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.

- 4. Hat der Kandidat das Tor mit dem Auto gewählt, dann öffnet der Moderator zufällig ausgewählt eines der beiden anderen Tore, hinter dem sich immer eine Ziege befindet.
- 5. Hat der Kandidat ein Tor mit einer Ziege gewählt, dann öffnet der Moderator dasjenige der beiden anderen Tore, hinter dem die zweite Ziege steht.
- 6. Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere ungeöffnete Tor zu wählen.
- 7. Das vom Kandidaten letztlich gewählte Tor wird geöffnet und er erhält das Auto, falls es sich hinter diesem Tor befindet.

Diese Regeln sind dem Kandidaten bekannt. Wie soll er sich im vorletzten Schritt entscheiden (soll er wechseln oder bleiben ?), um seine Gewinnchance zu maximieren ?