3.4 Folgen und Reihen

Inhaltsverzeichnis

1 Die Definition der Folge

Wir beginnen mit 3 Beispielen von Folgen.

- Die Lufttemperatur wird jeweils nach einer Stunde gemessen. Man misst folgende Werte:

  18.5 18.7 19.8 19.5 19.1 19.3 18.8 19.0 18.9 18.7

- Der Kurswert einer bestimmten Aktie wird täglich notiert.

  875.- 883.5 794.2 831.- 895.5 905.- 912.-

- Die Intensität der radioaktiven Strahlung einer Substanz wird im Abstand von 10 Minuten gemessen. Dabei erhält man die folgenden Messwerte:

  120000 60000 30000 15000 7500

Dies sind drei Beispiele von Folgen. Wir definieren:

Definition 1 *Eine Folge (genauer: Zahlenfolge) $< a_n >$ ist eine Auflistung von Zahlen, deren Reihenfolge festgelegt ist. Die einzelnen Bestandteile einer Folge nennen wir* ***Glieder****. Das erste Glied (d.h. die erste Zahl) der Folge heisst a_1, das zweite Glied heisst a_2,..., das n-te Glied heisst a_n.*

Bem 1
Eine Folge kann als Funktion aufgefasst werden, wobei die Definitionsmenge die Menge der natürlichen Zahlen ist. Eine Folge $< a_n >$ können wir folgendermassen als Funktion notieren:

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, f(n) = a_n.$$

2 Die explizite Definition einer Folge

Wir können eine Folge mit einer Formel definieren, mit der sich ein beliebiges Glied direkt berechnen lässt,z.B.:

Wir eine Folge mit einer Formel definiert, dann sagen wir, dass die Folge **explizit definiert** ist.

Übungen

1. Berechne die ersten 5 Glieder der untenstehenden Folgen !

   a) $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$ [0.5;0.8;1;8/7;1.25] b) $a_n = 5 + 2(-1)^n$ [3;7;3;7;3]

3 Die rekursive Definition einer Folge

Der Turm von Hanoi

Der bekannte Turm von Hanoi wurde vom französischen Mathematiker Edouard Lucas erfunden und im Jahre 1883 als Spiel verkauft. Er trug ursprünglich den Namen Prof. Claus von der Universität von Li-Sou-Stian, aber dieser Name wurde bald als Anagramm für Prof. Lucas von der Universität von Saint Louis erkannt.
Durch Experimentieren erhalten wir die folgenden Werte:

Anzahl Scheiben	1	2	3	4	5	...
Anzahl Umlegungen	1					...

Wir sehen sofort eine einfache Beziehung zwischen den benachbarten Gliedern:

Die rekursive Definition lautet:

Kurz zur Geschichte:
Der Ursprung des Spiels ist der mythische Turm von Brahma im Tempel der indischen Stadt Benares. Dieser Turm, so hiess es in der Beschreibung, bestand aus 64 goldenen Scheiben, die durch die Tempelpriester umgelegt wurden. Bevor sie damit fertig sein werden, so sagte man, wird der Tempel in Staub zerfallen und die Welt mit einem Donnerschlag verschwinden. Das Untergehen der Welt mag fraglich sein, jedoch besteht wenig Zweifel am Zerfall des Tempels. Es sind nämlich 18’446’744’073’709’551’615 (2^{64}-1) Umlegungen nötig. Unter der Annahme, dass die Priester Tag und Nacht arbeiten und in jeder Sekunde eine Scheibe umlegen, würden sie viele Milliarden Jahre brauchen, um ihre Arbeit zu vollenden.

Wenn eine Folge auf die obige Art und Weise dargestellt wird, sprechen wir von der **rekursiven Definition einer Folge**.

Bem 2
Damit eine rekursive Folge eindeutig festgelegt ist, muss der Wert ***eines Gliedes*** *und die Beziehung zwischen den Nachbargliedern gegeben sein.*

Beispiel

$$a_{n+1} = 3a_n + 2, a_1 = 4$$

Wir berechnen das zweite Glied a_2:

- $\underline{a_2} = 3a_1 + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = \underline{14}$

Übungen

2. Berechne jeweils das fünfte Glied der untenstehenden Folge !

   a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n$ [81]   b) $a_7 = 20, a_{n+1} = a_n + n$ [9]

3. Gib die rekursive Darstellung der untenstehenden Folgen an !

   a) 3,5,7,...   b) 5,9,17,33,65,...

   c) * 5,7,11,17,25,... [s.hinten]

4. Der Mathematiker Leonardo von Pisa (1170-ca. 1240), Sohn des Bonacci (lat.: filius Bonacci), wurde von seinen Zeitgenossen Fibonacci genannt. Er befasste sich unter anderem mit der Folge, die durch $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ gegeben ist. Diese Folge heisst deshalb Fibonacci-Folge. Berechne die ersten 6 Glieder dieser Folge. [s.hinten]

4 arithmetische Folgen

Bis jetzt haben wir rekursive und explizite Folgen angeschaut. In diesem Abschnitt geht es nun um arithmetische Folgen, das sind Folgen mit einer bestimmten Eigenschaft, die Du selber herausfinden kannst. Schauen wir uns ein Beispiel einer arithmetischen Folge an:

Die Stufenpyramide von Tajin in Mexico wurde gegen 600 n.Chr. erbaut. Auf einem 1m hohen Sockel erheben sich sieben Stufen von je 3.40m Höhe.

Wir wollen jeweils die Höhe über dem Boden notieren, nachdem wir eine Stufe bestiegen haben.

Stufe Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7
Höhe (m)	1	4.4						

Wir betrachten nun die Folge der berechneten Höhen (1,4.4,...)

Fragen dazu:

- Welche Eigenschaft hat diese Folge ?
- Wie lautet die rekursive Definition dieser Folge ?
- Drücke das vierte Glied mit Hilfe des Anfangsgliedes und der Differenz aus.
- Wie lautet die explizite Definition dieser Folge ?

Definition 2 *Eine Folge heisst arithmetische Folge, wenn gilt:*

Bemerkung: Eine arithmetische Folge entspricht einer Funktion 1.Grades der Form $y = mx + n$ mit dem Unterschied, dass man bei der Folge nur natürliche Zahlen einsetzt:

Übungen

5. Bei den unterstehenden Folgen handelt es sich um arithmetische Folgen. Bestimme die ersten 6 Glieder dieser Folgen.

   a) 3,11,...

   b) $a_2 = 4, d = -\frac{3}{2}$

   c) $a_2 = 7, a_6 = 13$ [s.hinten]

6. Handelt es sich bei den untenstehenden Folgen um eine Arithmetische Folge ?

   a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ [s.hinten]

   b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ [s.hinten]

7. Für eine arithmetische Folge gilt: $a_5 = 27.9$ und $a_{12} = 59.4$. Berechne a_1. [9.9]

8. Für eine arithmetische Folge gilt: $a_1 = 404, d = -7$ und $a_n = -9$. Berechne n. [60]

Wir nehmen an, es liege eine arithmetische Folge vor, deren Glieder (oder ein Teil davon) aufsummiert werden sollen. Dazu gibt es eine nette Geschichte von einem der berühmtesten und bedeutendsten Mathematikern, Johann Friedrich Gauss, die sinngemäss lautet:

Gauss, sieben Jahre alt, langweilte sich wieder einmal in der Schule. Der verzweifelte Lehrer versuchte ihn zu beschäftigen, indem er ihm die Frage stellte, wie gross die Summe der Zahlen von 1 bis 100 sei. Zum grossen Erstaunen und Leidwesen des Lehrers war Gauss mit dieser Aufgabe aber nur ein paar Sekunden beschäftigt, denn er löste sie genial einfach:

Für eine allgemeine arithmetische Folge: Gegeben ist die arithmetische Folge $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

Wir können folgenden Satz formulieren:

Satz 1 *Für eine arithmetische Folge gilt: Die Summe s_n der ersten n Glieder berechnet sich mit*

Übungen

9. Für eine arithmetische Folge gilt: $a_1 = 400$ und $a_{41} = 200$. Berechne s_{41}. [12300]
10. Berechne die Summe der geraden Zahlen von 100 bis und mit 10000 ! [25'002'550]
11. Heinz zersägt eine Dachlatte von 4m Länge in zehn Teile. Dabei ist jeder Teil 6cm länger als der zuvor abgesägte. Es bleibt kein Reststück übrig. Wie lang ist das kürzeste Stück ? [13 cm]

5 geometrische Folgen

In diesem Abschnitt geht es um geometrische Folgen, ich beginne wiederum mit einem Einführungsbeispiel:

Bakterien einer bestimmten Art teilen sich immer nach 20 Minuten. Eine Nährlösung wird mit 100 Bakterien geimpft. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich nach 20 Minuten alle Bakterien zugleich teilen. Wir können folgende Tabelle erstellen:

Vielf. von 20 Min	0	1	2	3	4	...
Anzahl	100					...

Wir betrachten nun die Folge der berechneten Anzahl Bakterien (100,200,...)

Fragen dazu:

- Welche Eigenschaft hat diese Folge ?
- Wie lautet die rekursive Definition dieser Folge ?
- Drücke das vierte Glied mit Hilfe des Anfangsgliedes und dem Quotienten aus.
- Wie lautet die explizite Definition dieser Folge ?

Definition 3 *Eine Folge heisst geometrische Folge, wenn gilt:*

Bemerkung: Eine geometrische Folge entspricht einer Exponentialfunktion der Form $y = c \cdot a^x$ mit dem Unterschied, dass man bei der Folge nur natürliche Zahlen einsetzt:

Übungen

12. Bei den untenstehenden Folgen handelt es sich um geometrische Folgen. Bestimme die ersten 5 Glieder dieser Folgen.

    a) 7,14,... b) $a_2 = 1.5, q = -2$

    c) $a_2 = 10, a_3 = -5$ d) $a_3 = 18, a_4 = 27$

13. Entscheide, ob eine geometrische Folge vorliegt !

    a) 0.1,0.2,0.4,... [ja] b) 0.9,0.99,0.999,... [nein]

14. Für eine geometrische Folge gilt $a_2 = 20$ und $a_5 = 10.24$. Berechne a_1 ! [25]

15. Für eine geometrische Folge gilt $a_1 = 6, q = 3$ und $a_n = 13122$. Berechne n. [8]

Wir stellen wiederum die Frage, wie wir Glieder einer geometrischen Folge aufsummieren können. Schauen wir uns eine konkrete Fragestellung an:

Aufgabe: Gegeben sei die GF 2,8,... Wie gross ist die Summe der ersten 7 Glieder ?

Allgemein:

Satz 2 *Die **Summe** s_n **der ersten n Glieder** einer geometrischen Folge $< a_n >$ lässt sich mit folgender Formel berechnen:*

Übungen

16. Für eine geometrische Folge gilt $a_1 = 6$ und $q = 1.2$. Berechne s_{21}. [1350.15]

17. Für eine geometrische Folge gilt $a_1 = 2$, $q = 3$ und $s_n = 177146$. Berechne a_n. [118098]

18. Wieviele Glieder der geometrischen Folge 15,16,... muss man mindestens addieren, wenn die Summe grösser als eine Milliarde werden soll ? [238 Gl.]

6 gemischte Übungen

19. Ein quadratisches Zeichenblatt von 2m Seitenlänge und 0.3mm Dicke wird in vier Quadrate zerschnitten. Jedes dieser vier Quadrate wird weiter geviertelt. Insgesamt macht man das sechsmal.
    a) Welche Seitenlänge haben die letzten Quadrate ? [0.031 m]
    b) Wie hoch wird der Stoss der aufeinandergelegten Blätter ? [1.23 m]

20. An einem Spielnachmittag findet folgender Wettkampf statt: Der Spielleiter hat 100 Tannzapfen und einen Harass längs einer geraden Strecke so hingelegt, dass je zwei benachbarte Tannzapfen 1 m Abstand haben. Der erste Tannzapfen liegt 3m vom Harass entfernt. Die Aufgabe besteht nun darin, die Zapfen einzeln einzusammeln und in den Harass zu legen. Startpunkt ist der Harass. Wie lang ist der Weg, den ein Teilnehmer dieses Spiels zurücklegt ? [10500 m]

21. Eine AF beginnt mit 3, endet mit 37 und hat die Summe 400. Wie viele Glieder hat die Folge ? [$n = 20$]

22. Eine AF mit der Differenz $d = 3$ beginnt mit 5 und endet mit 302. Wie viele Glieder hat die Folge ? [$n = 100$]

23. Ein Stein wird fallengelassen. Wir nehmen an, dass er in der ersten Sekunde 4.9 m und in jeder folgenden Sekunde 9.8 m mehr als in der vorhergehenden Sekunde zurücklegt (d.h. zwischen 1 und 2s 14.7m, zwischen 2 und 3s 24.5m, usw.). Wie viele Meter hat der Stein nach 20 s zurückgelegt ? [1960 m]

24. Eine GF besteht aus 10 positiven Gliedern; sie beginnt mit 1 und endet mit 2. Berechne s_{10}. [≈ 14.49]

25. Von einer GF wissen wir, dass $a_1 = 2$ und $s_2 = 8$. Berechne s_6. [728]

26. Wie viele Glieder der GF 1000,999,... sind grösser als 1 ? [6905 Gl.]

27. Eine arithmetische Folge besteht aus 14 Gliedern. Nimmt man das erste Glied weg, so beträgt die Summe der restlichen 13 Glieder 234, nimmt man das letzte Glied weg, so beträgt die Summe 208. Berechne a_1 und a_{14}. [$a_1 = 4$]

28. Das Theater von Epidaurus fasste in seiner ursprünglichen Form 7232 Menschen. In der ersten Reihe waren 40 Plätze; in jeder folgenden Reihe waren jeweils 12 Plätze mehr als in der vorhergehenden Reihe. Wieviele Reihen hatte das Theater ? [32]

29. (Zusatz) Das erste, zweite, und vierte Glied einer AF bilden die ersten drei Gleider einer GF (mit $q = 2$), deren viertes Glied um 12 grösser ist als das 4.Glied der AF. Gesucht sind die ersten vier Glieder beider Folgen. [AF: 3,6,9,12; GF: 3,6,12,24]

7 arithmetische Folgen höherer Ordnung

Unter arithmetischen Folgen höherer Ordnung verstehen wir Folgen, die sich auf arithmetische Folgen zurückführen lassen.

Beispiel 1 - arithmetische Folge 2.Ordnung

Wir betrachten die Folge 3,7,13,21,31,... . Wie lautet die explizite Definition der Folge ?

Beispiel 2 - arithmetische Folge 3.Ordnung

Wir betrachten die Folge 3,7,19,45,91,... . Wie lautet die explizite Definition der Folge ?

Satz 3 *Arithmetische Folgen* 2*-ter und* 3*-ter Ordnung lassen sich folgendermassen explizit beschreiben:*

- *2.Ordnung:* $a_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$
- *3.Ordnung:* $a_n = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$

Übungen

30. Wir betrachten die Folge der Quadratzahlen: 1,4,9,16,25,... .
    a) Dies ist eine arithmetische Folge ..... Ordnung.
    b) Wie lautet die explizite Definition ?
31. Wir betrachten die Folge der Kubikzahlen: 1,8,27,125,... .
    a) Dies ist eine arithmetische Folge ..... Ordnung.
    b) Wie lautet die explizite Definition ?
32. Die Folge der Dreieckszahlen lautet: 1,3,6,10,15,21,...
    a) Warum heissen diese Zahlen Dreieckszahlen ?
    b) Mit welcher expliziten Definition lässt sich diese Folge beschreiben ?
33. Die Folge der Tetraederzahlen lautet: 1,4,10,20,35,56,84,... . Berechne mit uneingeschränkter Hilfe des TI-NSpire die explizite Definition.
34. Wie lassen sie arithmetische Folgen n-ter Ordnung beschreiben ?

8 Grenzwerte von geometrischen Folgen

Es liegt eine geometrische Folge mit unendlich vielen Gliedern vor. Es werden nun immer mehr Glieder aufsummiert. Schauen wir uns folgendes Beispiel an:

Gegeben sei die GF $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots.$

Frage: Was erhalten wir, wenn wir immer mehr Glieder aufsummieren ?

Wir veranschaulichen die Situation:

Wir stellen fest:

Können wir die Frage nach dieser Grenze auch rechnerisch beantworten ?

Wir stellen also fest: wenn wir beliebig viele Glieder aufsummieren heisst das nicht, dass wir

....

Zur Symbolik:

Wir wollen s nun für eine beliebige geometrische Folge mit $|q| < 1$ berechnen:

Wir können nun den folgenden Satz formulieren:

Satz 4 *Gegeben sei eine GF mit $|q| < 1$. Dann gilt:*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n =$$

Übungen

35. Es liegt jeweils eine GF vor. Berechne s, falls möglich.

    a) 2,1,... b) 1,0.75,...

    c) 0.75,1,... d) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$

    [4;4;n.m.;$0.\overline{3}$]

36. Es liegt jeweils eine GF vor. Berechne a_1.

    a) $q = 0.75, s = 100$ [25] b) $q = -0.1, s = 100$ [110]

37. Welches ist der grösste Wert, den der Quotient q einer GF mit unendlich vielen Gliedern und $a_1 = 4$ nicht übersteigen darf, wenn die Summe aller Glieder die Zahl 12 nicht übersteigen darf ? [$q = \frac{2}{3}$]

38. Einem Würfel mit der Kantenlänge 1 m wird ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass die Ecken der Grundfläche des zweiten Würfels auf die Kantenmitten der Deckfläche des ersten Würfels zu liegen kommen. Auf gleiche Weise wird dem zweiten Würfel ein dritter aufgesetzt usw.

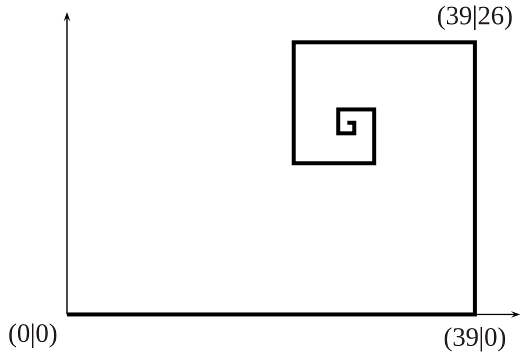
    a) Wie hoch wird der Würfel-Turm höchstens ? [3.4142 m]

    b) Berechne den Grenzwert des Turmvolumens. [1.5469 m^3]

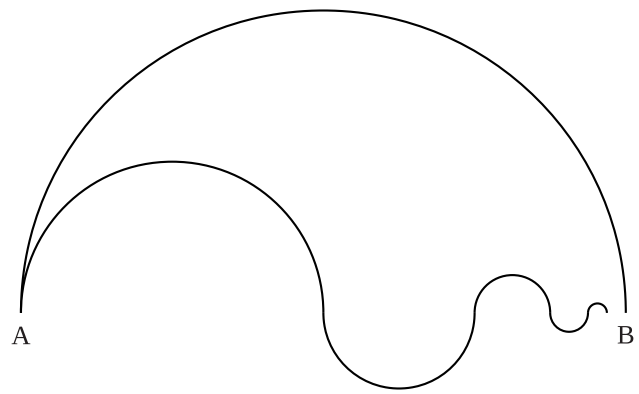
39. Einem Quadrat mit der Seite a wird ein Kreis einbeschrieben, diesem ein Quadrat, diesem wieder ein Kreis, usw. Berechne die Summe aller

    a) Quadratumfänge. $[13.66a]$ b) Kreisflächen. $[\frac{\pi}{2}a^2]$

40. Der spiralförmige Weg (dickgezogene Linie) beginnt im Ursprung (0|0) und besteht aus unendlich vielen Strecken, deren Längen eine GF bilden. Wie lang ist der gesamte Weg und wo ist sein Ziel? $[117, P(27|18)]$



41. Der Schlangenweg von A nach B ($\overline{AB} = 2r$) setzt sich aus unendlich vielen Halbkreisbogen zusammen, deren Radien eine GF mit dem Quotienten 0.5 bilden. Der Durchmesser des erstes Halbkreises des Schlangenweges ist gleich der Hälfte der Strecke AB.



    a) Berechne den Grenzwert des Schlangenweges. $[\pi r]$

    b) Berechne den Flächeninhalt des Gebietes, das von sämtlichen Halbkreisen begrenzt wird. $[0.4\pi r^2]$

42. (Zusatz) Der griechische Philosoph Zenon vertrat die paradoxe Ansicht, dass Achill, der schnellste Läufer der griechischen Sage, eine mit einem gewissen Vorsprung dahinkriechende Schildkröte niemals einholen könne. Denn in der Zeit, in der Achill den vorhandenen Vorsprung aufholt, hat die Schildkröte einen neuen Vorsprung erzielt. Es ist offensichtlich, dass hier etwas nicht stimmen kann. Finde heraus, wo der Haken liegt (rechne am besten mit konkreten Zahlen, z.B. hat die Schildkröte einen Vorsprung von 10m und eine Geschwindigkeit von 0.1m/s und Achilles laufe mit 10m/s) !

9 Finanzmathematik-Rentenrechnung

Beispiel

Herr X bezahlt am Anfang jeden Jahres einen Betrag von 1000Fr. ein. Welchen Betrag hat Herr X am Ende des 4.Jahres auf dem Konto, wenn der Jahreszins 5% beträgt ?

Beginn Jahr	Betrag
0	
1	
2	
3	
4	
Ende Jahr 4	

Beim obenstehenden Beispiel sprechen wir von **vorschüssigen Renten**, weil die Rente jeweils zu Jahresbeginn einbezahlt wird. Es gibt auch nachschüssige Renten, die jeweils am Jahresende bezahlt werden. Diese werden in diesem Skript nicht untersucht (bzw. nur als Zusatzaufgabe).

Übungen

43. Löse ohne die Formel für vorschüssige Renten: Ein Sparplan sieht folgendes vor: Zu Beginn eines jeden Jahres werden 1000 Franken auf ein Konto einbezahlt. Der Zins beträgt 3%. Welches Kapital würde auf diese Weise am Ende des dreissigsten Jahres erreicht ? [49002.7 Fr]

44. Der Vater von Peter eröffnete am 1.September 1983 ein Sparkonto für seinen Sohn, indem er 1000 Fr. einzahlte. Seitdem überweist er regelmässig am 1.Januar 300 Fr. auf dieses Konto. Auf welchen Betrag wird das Konto am 1.Januar 2003 angewachsen sein, wenn der Zinssatz 3.5% beträgt ? [10128.80 Fr]

45. Herr Leibundgut hat zurzeit 5000 Fr. auf dem Bankkonto (3% Zins). Wieviel Geld muss er zusätzlich während 15 Jahren regelmässig am Jahresbeginn einzahlen, damit er nach 15 Jahren über 20000 Fr. verfügt ? [637.40 Fr]

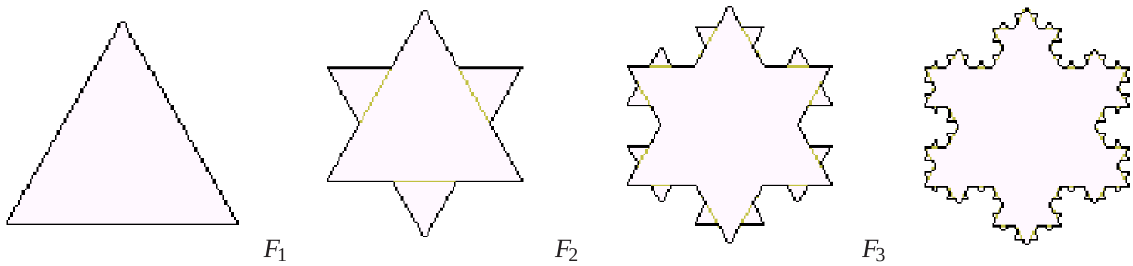
46. Ein Startkapital von 10000 Fr. wird zu Beginn des Jahres 1989 zu 4.5% angelegt. In diesem und in den folgenden 5 Jahren wurde jeweils am Jahresende 5000 Fr. eingezahlt. Wieviel muss Ende 1998 einbezahlt werden, damit der Kontostand am 31.12.2000 100000 Fr. beträgt ? [35993.20 Fr]

47. Es werden Renten der Höhe R jeweils am Jahresanfang einbezahlt (vorschüssige Renten). Der Zinssatz betrage p ($q = 1 + p$). Leite die Formel her, mit der man den Gesamtbetrag (mit Verzinsung) am Ende den n-ten Jahres berechnen kann.

10 Fraktale

10.1 Die Kochsche Schneeflocke

Zu beginn der Chaosforschung hat man unter anderem die sogenannten Schneeflockenfiguren untersucht:



F_1 F_2 F_3 F_4

Wir nehmen an, dass die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks der ersten Figur 1 betrage. Um die zweite Figur zu bilden, schneidet man bei jeder Seite der ersten Figur das mittlere Drittel heraus und fügt zwei weitere Seiten so hinzu, dass wieder ein gleichseitiges Dreieck entsteht.

Diejenige Figur, die man nach unendlich vielen Schritten erhalten würde (man wird sie nie zeichnen können !), wird die Kochsche Schneeflocke genannt (nach dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch).

Folgende Fragen:

- Wieviele Seiten hat die n-te Figur ?

- Wie lang ist die Seitenlänge eines Dreiecks in der n-ten Figur ?

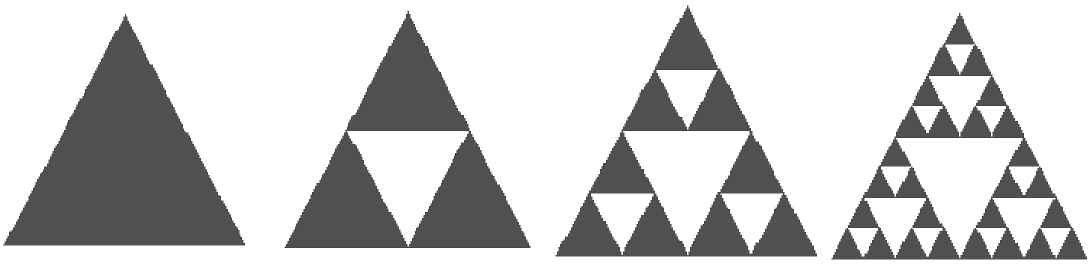
- Wie gross ist der Umfang der n-ten Figur ?

- (Zusatz) Wie gross ist der Flächeninhalt der n-ten Figur ?

- Wie gross ist der Umfang und der Flächeninhalt (Zusatz) der Kochschen Schneeflocke ?

10.2 Das Sierpinski-Dreieck

Gegeben ist eine gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1. Anschliessend verbindet man die Mittelpunkte der Seiten miteinander und schneidet das eingeschlossene Dreieck aus. Die zweite Figur hat dann also 3 Dreiecke. Diesen Vorgang kann man beliebig oft wiederholen. Die Figur, die man nach unendlich vielen Schritten entstehen würde, heisst Sierpinski-Dreieck.



F_1 F_2 F_3 F_4

Folgende Fragen:

- Wieviele Dreiecke hat die n-te Figur ?

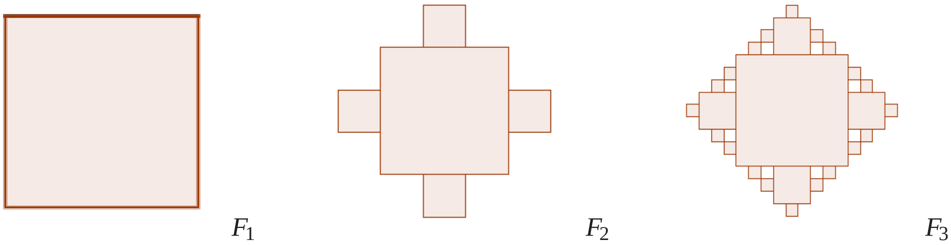
- Wie lang ist die Seitenlänge eines Dreiecks in der n-ten Figur ?

- Wie gross ist der Flächeninhalt der n-ten Figur ?

- Wie gross ist der Gesamtumfang (d.h. die Summe der Umfänge von allen Dreiecken) und den Flächeninhalt des Sierpinski-Dreiecks ?

Übungen

48. Betrachte die folgenden drei Figuren:

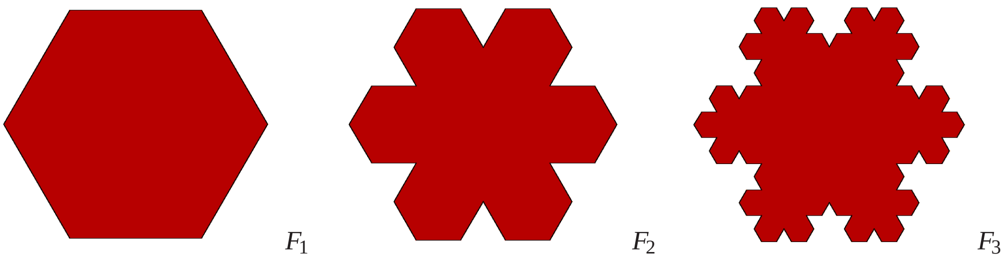


Die Seitenlänge der ersten Figur beträgt 1. Die anderen Figuren erhält man, indem man jeweils eine Seite drittelt und ein Quadrat hinzufügt.

a) Gib jeweils eine explizite Definition der Folge (s_n) der Seitenlängen, der Folge (k_n) der Anzahl Seiten und der Folge (U_n) der Umfänge.

b) Gib eine explizite Definition für die Folge (F_n) der Flächeninhalte an.

49. Betrachte die folgenden drei Figuren:



(Maturaufgabe 2008/2009) Die Ausgangsfigur F_1 ist ein reguläres Sechseck (d.h gleich lange Seiten und gleich grosse Innenwinkel) mit Seitenlänge 1 cm. Die anderen Figuren erhält man, indem man jeweils eine Seite drittelt und ein gleichseitiges Dreieck über dem mittleren Drittel ausschneidet.

a) Gib eine explizite Definition der Folge U_n der Umfänge der Figuren an und bestimme U_{20}.

b) Für welches n ist der Umfang U_n erstmals grösser als der Erdumfang ($40'000 km$) ?

c) Betrachte die Folge D_n der Flächendifferenzen der Figuren, d.h. die Fläche der Figur F_2 ist um D_1 kleiner als die Fläche der Figur F_1, die Fläche der Figur F_3 ist um D_2 kleiner als die Fläche der Figur F_2 usw. Bestimme D_1 und D_2.

d) Welcher Flächenanteil des ursprünglichen Sechsecks ist in der Grenzfigur noch vorhanden ?

11 Reihen

11.1 Definition

Wir schauen uns zuerst ein Beispiel an:

- Gegeben ist die Folge $< a_n >= 1, 2, 3, 4, \ldots$. Aus dieser Folge wollen wir nun eine neue Folge bilden.
- Das erste Glied der neuen Folge $< b_n >$ stimmt mit dem der alten Folge überein: $b_1 = 1$.
- Das zweite Glied ist die Summe der ersten zwei Glieder von $< a_n >$: $b_2 = 1 + 2 = 3$.
- Das dritte Glied ist die Summe der ersten drei Glieder von $< a_n >$: $b_3 = 1 + 2 + 3 = 6$.
- Die neue Folge lautet: $< b_n >= 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

Die neue Folge $< b_n >$ ist aus der alten Folge $< a_n >$ entstanden, indem wir die Summe der ersten n-Glieder (n-te Teilsumme) genommen haben. Eine Folge, die so gebildet wird, nennen wir **Reihe**. Wir definieren die Reihe folgendermassen:

Definition 4 *Gegeben ist die Folge $< a_n >$. Unter der **n-ten Teilsumme** s_n verstehen wir die Summe der ersten n Glieder von $< a_n >$, ausgeschrieben: $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$.*

Definition 5 *Gegeben ist die Folge $< a_n >$. Unter der **Reihe von** $< a_n >$, verstehen wir die Folge $< s_n > = s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$.*

Eine Reihe entsteht also immer aus einer Folge heraus.

Übungen

50. Zu den untenstehenden Folgen können wir die dazugehörige Reihe berechnen. Bestimme die ersten 4 Glieder dieser Reihen !

    a) 3,6,12,24,...
    b) 5,9,17,33,65,...
    c) 5,7,11,17,25,...
    d) 4,10,22,46,94,...

11.2 Das Summenzeichen

Manchmal können wir Reihen elegant mit Hilfe des Summenzeichens darstellen. Dieses Zeichen wird anhand der folgenden 2 Beispiele erklärt:

- $\sum_{i=1}^{7}(3i)$; Wichtig ist hier die Variable i (wiederum Index genannt). Sie wird raufgezählt von 1 bis 7: $\sum_{i=1}^{7}(3i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = \underline{84}$

- $\sum_{i=6}^{10}(3i)$; Hier beginnt die Variable i erst bei 6. Sie wird dann raufgezählt bis 10: $\sum_{i=6}^{10}(3i) = 3\cdot 6 + 3\cdot 7 + 3\cdot 8 + 3\cdot 9 + 3\cdot 10 = \underline{120}$

Nun ein Beispiel einer Reihe, die mit dem Summenzeichen dargestellt wird: $a_n = \sum_{i=1}^{n}(3i)$. Wir können nun die einzelnen Glieder ausrechnen:

- $a_1 = \sum_{i=1}^{1}(3i) = 3\cdot 1 = 3$.
- $a_2 = \sum_{i=1}^{2}(3i) = 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9$.
- $a_3 = \sum_{i=1}^{3}(3i) = 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 = 18$.
- Die Reihe lautet also: 3,9,18,... .

Übung

51. Berechne die folgenden Summen !

    a) $\sum_{i=1}^{5}(i+1)$

    b) $\sum_{j=5}^{10}(j^2-1)$

    c) $\sum_{k=2}^{6}(2k-3)$

    d) $\sum_{i=0}^{5}(2^i)$

    [20;349;25;63]

52. Schreibe mit dem Summenzeichen !

    a) Die Summe der natürlichen Zahlen von 100 bis und mit 1000.

    b) Die Summe der geraden Zahlen von 2 bis und mit 100.

    c) 2!+3!+4!+...+50!

    d) Die Summe der ungeraden Quadratzahlen von 121 bis und mit 2401.

53. Berechne jeweils das 1.,2. und 5.Glied der untenstehenden Reihen !

    a) $a_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$

    b) $b_n = \sum_{j=0}^{n}(2j+1)$

11.3 unendliche Reihen

Wir kommen zum Abschluss des Themas noch kurz auf unendliche Reihen zu sprechen. Besser gesagt haben wir uns schon damit beschäftigt, wir haben einfach den Begriff nicht gebraucht !

Definition 6 *Gegeben sei eine Reihe $< s_n >$. Unter der unendlichen Reihe verstehen wir den Grenzwert*

$$s = \lim_{n\to\infty} < s_n >$$

Wir haben uns beim Abschnitt 8 also mit nichts anderem als mit unendlichen Reihen beschäftigt ! Der Grenzwert existiert nicht immer, wie wir gesehen haben.

Übung

54. Welche Zahlen stecken hinter den folgenden unendlichen Reihen ? (Zusatz: Stelle die Reihen mit einem Summenzeichen dar).

a) $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\ldots=$

b) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=$

55. Welche Funktionen stecken hinter den folgenden unendlichen Reihen ? Löse die Aufgabe mit Hilfe des TI-NSpire (Zusatz: Stelle die Reihen mit einem Summenzeichen dar).

a) $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$

b) $f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$

c) $f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$

12 Lösungen

3. a) $a_{n+1} = a_n + 2$ b) $a_{n+1} = 2a_n - 1$

4. $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$

5. a) 3,11,19,27,35,43 b) 5.5,4,2.5,1,-0.5,-2 c) 5.5,7,8.5,10,11.5,13

6. a) ja b) nein

45. a) $s_n = \frac{1}{3^{n-1}}; k_n = 4 \cdot 5^{n-1}, U_n = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$
 b) $F_n = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$

46. a) $6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ b) $n = 72$
 c) $D_n = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot A_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ d) 80%

52. a) $\sum_{i=100}^{1000} i$ b) $\sum_{i=1}^{50} 2i$ c) $\sum_{i=2}^{50} i!$ d) $\sum_{i=11}^{49} i^2$

53. Berechne jeweils das 1.,2. und 5.Glied der untenstehenden Reihen !
 a) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_5 = 55$ b) $b_1 = 4, b_2 = 9, b_5 = 36$

54. a) π b) e

55. a) e^x b) $\sin(x)$ c) $\cos(x)$