3.2 Exponentialfunktion und Wachstum/Zerfall

Inhaltsverzeichnis

1 Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist folgendermassen definiert:

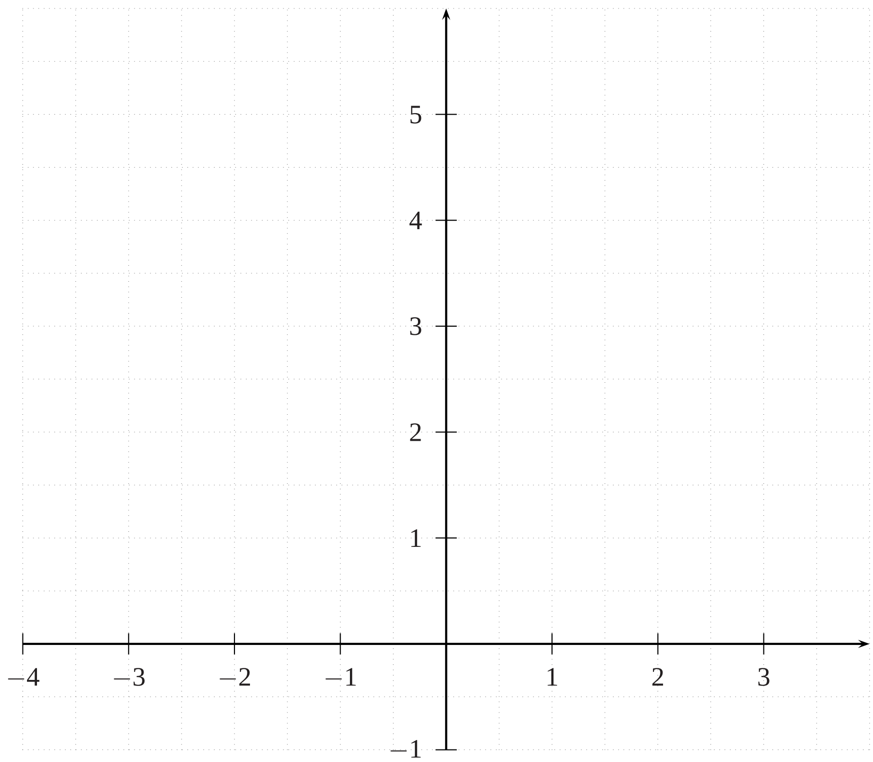
Definition 1 *Eine Funktion heisst* ***Exponentialfunktion****, wenn ihre Vorschrift die folgende Form hat:*

Bem 1
Das Argument x steht im Exponent, daher der Name Exponentialfunktion.

Wie sieht der Graph einer Exponentialfunktion aus ? Das kommt natürlich darauf an, welchen Wert wir für den Parameter a einsetzen. Setzen wir mal $a = 2$. Wir erhalten die folgende Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	...
2^x						

Wir zeichnen die Punkte ins Koordinatensystem ein:



Übungen

1. a) Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen ins obenstehende Koordinatensystem. Kann a aus dem Graphen herausgelesen werden ?

   i) $f(x) = 3^x$ ii) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ iii) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

   b) Streiche bei den folgenden Sätzen das falsche Wort durch:

   i) Für $a > 1$ gilt: Je grösser a, umso steiler/flacher ist der Graph auf der rechten Seite der x-Achse.

   ii) Für $0 < a < 1$ gilt: Je grösser a, umso steiler/flacher ist der Graph auf der linken Seite der x-Achse.

2. Stelle rechnerisch fest, ob der angegebene Punkt oberhalb, unterhalb oder auf dem Graphen mit der Vorschrift $f(x) = 2^x$ liegt.

   a) $P_1 = (4|15)$ b) $P_2 = (-2|0.24)$ c) $P_3 = (3|8)$

   [Lösung s.letzte Seite]

3. Bestimme, falls möglich, die Basis der Funktion f mit der Funktionsvorschrift $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, wenn der Punkt P auf dem Graphen der Funktion liegt.

   a) $P_1 = (1|3)$ b) $P_2 = (2|3)$ c) $P_3 = (2|4)$

   [Lösung s.letzte Seite]

4. Prüfe nach, ob sich die folgenden 3 Punkte auf der gleichen Exponentialkurve der Form $c \cdot a^x$ befinden:

$$P_1(1|19.5), P_2(2|29.25), P_3(4|65.8125)$$

   [Lösung s.letzte Seite]

5. Entscheide, ob es sich bei folgenden Wertetabellen um eine Exponentialfunktion handelt ?

   a)

-1	0	1	2	3
0.25	1	4	16	64

   b)

-1	0	1	2	3
-1	1	3	5	7

   [Lösung s.letzte Seite]

6. Gib die Gleichung der Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ an, deren Graph durch die folgenden Punkte geht.

   a) $P(2|1), Q(5|7)$ b) $P(-2|5), Q(1|0.5)$

   [Lösung s.letzte Seite]

7. Auf Filmverpackungen wird die Lichtempfindlichkeit des photographischen Materials meist mit DIN (deutsche Norm) und ASA (amerikanische Norm) angegeben. Dabei entsprechen sich

DIN	15	18	21	24	27
ASA	25	50	100	200	400

a) Finde eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = c \cdot a^x$, die den Zusammenhang von DIN und ASA beschreibt.

b) Rechne die Filmempfindlichkeit 28DIN in ASA um.

c) Welcher Filmempfindlichkeit entspricht 500ASA in der DIN-Norm ?

[Lösung s.letzte Seite]

8. Der Luftdruck in der Erdatmosphäre, der in der Einheit hPa (Hektopascal) gemessen wird, nimmt mit grösser werdender Höhe über dem Meeresspiegel immer weiter ab. Andere Grössen ausser der Höhe, die auch den Luftdruck beeinflussen, wie z.B. die geographische Breite, die Lufttemperatur oder das aktuelle Wettergeschehen, werden in dieser Aufgabe vernachlässigt. Die untenstehende Tabelle gibt Messwerte für den Luftdruck p in der Erdatmosphäre für verschiedene Höhen h über dem Meeresspiegel:

Höhe h in m	500	1000	1500	2000
Luftdruck p in hPa	951.79	894.06	839.82	788.87

a) Weise rechnerisch nach, dass der Zusammenhang zwischen der Höhe und dem Luftdruck durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann.

b) Bestimme mit Hilfe des ersten und des zweiten Wertepaares den Funktionsterm ($p(h) = c \cdot a^h$) dieser Exponentialfunktion. Überprüfe, ob die anderen Wertepaare die Funktionsgleichung ungefähr erfüllen.

[Lösung s.letzte Seite]

2 Exponentielles Wachtum und exponentieller Zerfall

In diesem Abschnitt geht es um exponentielle Wachstums- oder Zerfallsprozesse wie z.B. die Verzinsung eines Kapitals, Vermehrung eines Algen- oder Waldbestandes, radioaktiver Zerfall, usw. Solche Prozesse können mit Exponentialfunktionen beschrieben werden. Es gibt drei Schreibweisen, die in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden, wobei jede von ihnen ihre Vorteile hat.

2.1 Die Schreibweise $B(t) = B(0) \cdot a^t$

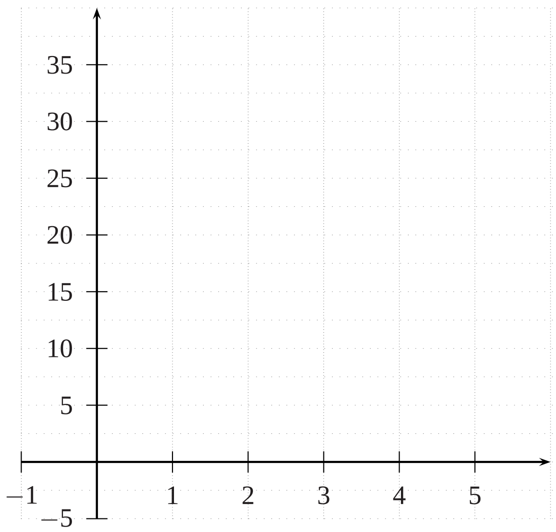
Beispiel 1

Ein See ist zu 1.5% mit Algen bedeckt. Diese vermehren sich so, dass sie jeden neuen Tag eine doppelt so grosse Fläche bedecken. Wie kann dieses Wachstum mit einer Formel beschrieben werden ?

Wir füllen zuerst folgende Tabelle aus:

Tage	0	1	2	3	4	...
Fläche in %	1.5					...

Wir zeichnen die Punkte ins Koordinatensystem ein:

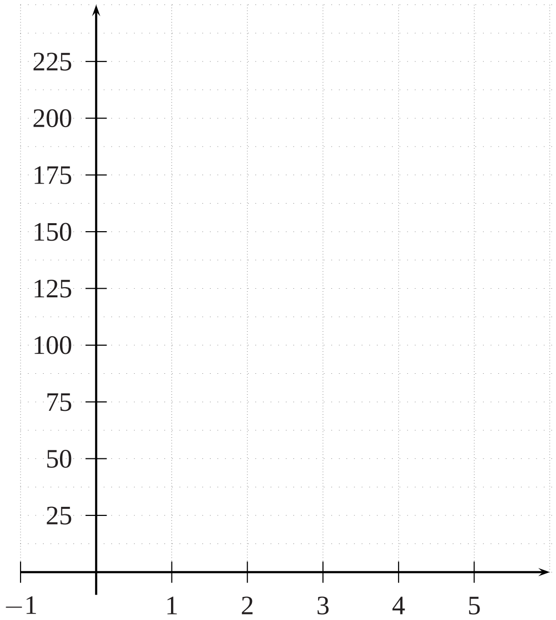


Beispiel 2

Ein radioaktiver Stoff bestehe aus 243 Mio Atomen. Jede Stunde zerfällt ein Drittel des Bestandes. Mit welcher Vorschrift lässt sich dieses Wachstum beschreiben ?

Stunden	0	1	2	3	4	...
Atome in Mio	243					...

Wir zeichnen die Punkte ins Koordinatensystem ein:



Wir halten fest:

exponentielle Wachstumsvorgänge lassen sich mit einer Gleichung der folgenden Form beschreiben:

$B(0)$ ist dabei der Bestand zum Zeitpunkt $t = 0$ (Anfangsbestand), a ist der Wachstumsfaktor. Wenn

- $0 < a < 1$: Exponentieller Zerfall (der Bestand nimmt mit der Zeit ab)
- $a > 1$: Exponentielles Wachstum (der Bestand nimmt mit der Zeit zu)

Bemerkungen:

- Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass man aus dem Wachstumsfaktor a die prozentuale Zunahme pro Zeiteinheit direkt herauslesen kann.
- Häufig ist auch folgende Schreibweise anzutreffen: $N(t) = N_0 \cdot a^t$. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

Mit dem folgenden Beispiel führen wir eine konkrete Berechnung durch:

Beispiel 3

Von 5 kg (Zeitpunkt $t = 0$) eines radioaktiven Isotops (exponentieller Zerfall) sind nach 6 Stunden noch 2 kg vorhanden.

- Wie lautet das Zerfallsgesetz ?

- Nach welcher Zeit ist noch 1 kg vorhanden ?

Übungen

9. Eine Bakterienpopulation umfasst $4 \cdot 10^6$ Exemplare. Nach 2 Stunden hat sich die Zahl der Exemplare vervierfacht. Wir nehmen an, dass die Zahl der Exemplare exponentiell wächst. Wie viele Exemplare sind nach 10 Stunden vorhanden ? [$\approx 4 \cdot 10^9$ Bakterien]

10. 2% eines Sees ist mit Algen bedeckt. Die Algenfläche verdoppelt sich jeweils innert zwei Tagen.
    a) Warum handelt es sich hier um exponentielles Wachstum ?
    b) Mit welcher Funktionsvorschrift (Formel) kann dieses Wachstum beschrieben werden ? [$B(t) \approx 2\% \cdot 1.414^t$]
    c) Nach wievielen Tagen ist der See ganz mit Algen bedeckt ? [$\approx$ 11.29 Tage]
    d) Nach wievielen Tagen ist der See ganz mit Algen bedeckt, wenn sich die Algenfläche jeweils innert 5 Tagen verdoppelt ? [$\approx$ 28.22 Tage]

11. Eine Bakterienpopulation wächst exponentionell. Um 14 Uhr sind 2300 Bakterien vorhanden, um 16 Uhr sind es 36000 Bakterien.

    a) Wieviele Bakterien hat es um 16.30 Uhr ? [$\approx$ 71605 Bakterien]

    b) Um welche Uhrzeit sind 100000 Bakterien vorhanden ? [$\approx$ 16.45 Uhr]

12. Ein Auto verliert jedes Jahr an Wert. Im 1.Jahr ist die Wertminderung am grössten, danach wird sie von Jahr zu Jahr geringer. Der Autohandel geht von 19% Wertminderung pro Jahr aus.

    a) Stelle die Wertminderung für ein Auto, dessen Neupreis 25000 Fr. ist, graphisch dar.

    b) Berechne die Halbwertszeit (die Zeit, nach der das Auto nur noch halb soviel Wert hat). [$t \approx 3.29$ Jahre]

    c) Berechne die Halbwertszeit, wenn das Auto einen Neupreis von 40000 Fr. gehabt hätte. [$t \approx 3.29$ Jahre]

    d) Kannst Du eine Formel angeben, mit der sich die Halbwertszeit direkt berechnen lässt ?

13. Ein Kapital von 1000 Fr liegt auf einer Bank und wird mit 5% verzinst.

    a) Wie gross ist das Kapital nach 5 vollen Jahren bei einem Zins von 5% ? [1276.28 Fr]

    b) Wie viele Jahre würde es dauern bis das Kapital auf 10000Fr. angewachsen ist ? [47.19 J.]

    c) Nach welcher Zeit hat sich das Kapital verdoppelt ? [14.21 J.]

    d) Nach welcher hätte sich ein Kapital von 3000 Fr verdoppelt ? [14.21 J.]

    e) Kannst Du eine Formel angeben, mit der sich die Verdoppelungszeit direkt berechnen lässt ?

14. Die Einwohnerzahl von Afrika nahm von 1980 bis 1985 jährlich um 3% zu. In der Mitte des Jahres 1985 betrug sie 555 Millionen.

    a) Welches war die Einwohnerzahl Mitte 1980 (auf Millionen genau) ? [479 Mio]

    b) In welchem Jahr wird die Einwohnerzahl bei unveränderter Wachstumsrate die Milliardengrenze überschreiten ? [2005]

    c) Welches ist die Verdoppelungszeit bei unveränderter Wachtumsrate ? [23.45 Jahre]

15. Wenn Licht in Wasser eindringt, so verliert es mit zunehmender Wassertiefe durch Absorption an Intensität. In reinem Meerwasser nimmt die Lichtintensität pro Meter um etwa 75% des bis dahin verbliebenen Wertes ab.

    a) Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität sind in 1 m (2 m; 3 m) Wassertiefe noch vorhanden ? [25%, 6.25%, 1.56%]

    b) Ab welcher Tiefe beträgt die Lichtintensität weniger als 1 Promille der ursprünglichen Intensität ? [ab 4.98 m]

16. Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu testen, wird ein bestimmter Farbstoff in sie eingespritzt und dessen Ausscheiden gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse scheidet pro Minute etwa 4% des jeweils noch vorhandenen Farbstoffs aus. Wir nehmen an, dass 0.2 Gramm des Farbstoffs injiziert werden und dass nach Ablauf von 30 Minuten noch 0.1 Gramm vorhanden sind. Funktioniert die Bauchspeicheldrüse normal ? [nein, bei normaler Funktion wären nur noch 0.06 Gramm des Farbstoffs vorhanden]

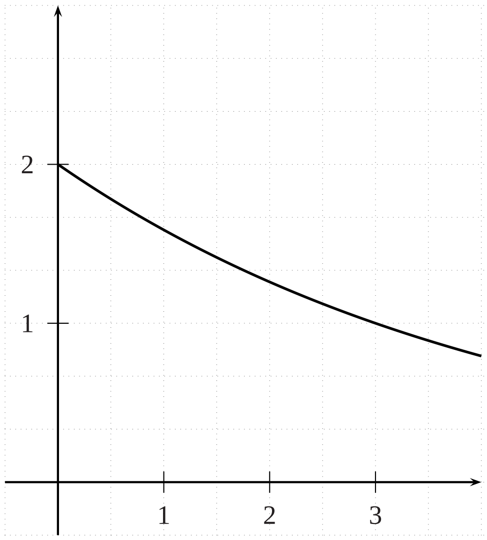
2.2 Die Schreibweise $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{k}}$

Exponentielles Wachstum oder Zerfall kann auch mit folgendem Gesetz beschrieben werden:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{k}}$$

Anstelle von B wird N geschrieben für Anzahl, weiter wird beim Anfangsbestand die Zahl 0 tiefgestellt.

Wir versuchen nun herauszufinden, was der Parameter k über den Wachstums-Zerfallsvorgang aussagt. Dazu setzen wir $k = 3$ und $N_0 = 2$ und zeichnen den entsprechenden Graphen:



Wir beobachten:

Wir können unsere Beobachtung rechnerisch bestätigen:

Die nachfolgenden Übungen lassen sich mit dieser Schreibweise besonders einfach lösen.

Übungen

17. Polonium hat eine Halbwertszeit von 138.5 d.
    a) Wie lautet das Zerfallsgesetz ?
    b) Wie viele Prozent der Kerne zerfallen in 10 Tagen ? [4.88%]

18. Die Radiocarbon-Methode (C-Methode): In der Atmosphäre befindet sich ein geringer Anteil des radioaktiven Kohlenstoffes C mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Jeder lebende Organismus enthält, solange er lebt, ebenfalls diesen Anteil an C-Atomen. Nach dem Tod wird jedoch kein neues C mehr aufgenommen, so dass sich der Anteil innerhalb von 5730 Jahren jeweils halbiert. Werden antike Holzstücke oder Knochen bei Ausgrabungen auf ihr Alter hin untersucht, so muss lediglich festgestellt werden, welcher Bruchteil des ursprünglichen C-Anteils noch vorhanden ist.
    a) Im Jahre 1992 wurde im Eis eines Gletschers der Ötztaler Alpen ein Jahrhundertfund gemacht. Touristen entdeckten die vollständig erhaltene Leiche eines Steinzeitmenschen, der – nach seinem Fundort benannt – durch die Presse unter dem Spitznamen „Ötzi“bekannt wurde. Die Untersuchung des Körpers mit der Radiocarbon-Methode ergab noch eine Aktivität von 57%.
        i) Gib die Zerfallsfunktion an.
        ii) Vor wie vielen Jahren etwa ist „Ötzi“gestorben ? [4647 Jahre]
    b) Bei einer altägyptischen Königsmumie misst man einen Anteil von $7/12$ an nicht stabilem Kohlenstoff. Wie alt ist die Mumie etwa ? [4460 Jahre]

19. Pb-210 hat eine molare Masse von $209.98u$ ($1u \approx 1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg, $N_A \approx 6.0221 \cdot 10^{23}/\text{Mol}$), d.h 1 Mol entspricht $209.98u$. Die Halbwertszeit beträgt 22.3 Jahre. Wie haben nun 1 g Pb-210.
    a) Aus wievielen Atomkernen besteht dieses Gramm Pb-210 ?
    b) Mit welchem Gesetz lässt sich der radioaktive Zerfall von Pb-210 beschreiben ?
    c) Wieviele Kerne zerfallen in einem Jahr ?
    d) Wieviele Kerne zerfallen in einer Sekunde ?

2.3 Die Schreibweise $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Die dritte Variante, wie wir exponentielles Wachstum beschreiben können, sieht folgendermassen aus:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Die Vorteile dieser Schreibweise werden erst im 4.Jahr bei der Differentialrechnung sichtbar werden (die Ableitungsfunktion lässt sich besonders einfach bestimmen).

Wir berechnen die Halbwertszeit:

Übungen

(Schreibe das Zerfallsgesetz jeweils in der Form $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$)

20. Die Halbwertszeit eines Poloniumisotopes beträgt 138 Tage. Berechne, welche Masse von 12 g nach 30 Tagen noch vorhanden ist. [$\approx 10.32\,\mathrm{g}$]

21. Gegeben sei eine Masse Radium mit 1000 mg. Berechnen Sie, welche Masse nach 4100 Jahren noch vorliegt. Die Halbwertszeit von Radium beträgt 1620 Jahre. [$\approx 10.32\,\mathrm{g}$]

22. Die Masse einer radioaktiven Substanz wird minütlich ermittelt. Man erhält folgende Tabelle:

0	1	2	3	4	5	6
75	71.6	68.4	65.3	62.3	59.5	56.8

Prüfe, ob es sich um exponentiellen Zerfall handelt. Ermittle das Zerfallsgesetz und die Halbwertszeit. Nach welcher Zeit ist noch 1% der ursprünglichen Masse vorhanden ? [$\approx$ 15 Min,$\approx$ 100 Min]

23. Auf einer Insel wird ein Atomtest durchgeführt; dabei wird Strontium 90 freigesetzt (Halbwertszeit: 28 Jahre). Nach dem Test liegen die Strahlungswerte auf der Insel um 20% über der Toleranzgrenze. Nach wie vielen Jahren kann man die Insel erstmals wieder betreten ? [7.36a]

24. Auf einem Bauernhof werden im Heu Spuren von radioaktivem Jod 131 festgestellt (Halbwertszeit: 8 Tage), die 80% über dem zulässigen Wert liegen. Wie lange muss das Heu gelagert werden, bis es verfüttert werden kann ? [6.78d]

3 Lösungen

2. a) unterhalb b) unterhalb c) auf
3. a) $a = 3$ b) $a = \sqrt{3}$ c) $a = 2$
4. ja
5. a) ja b) nein
6. a) $f(x) \approx 0.27 \cdot 1.91^x$ b) $f(x) \approx 1.08 \cdot 0.46^x$
7. a) $f(x) = 0.78 \cdot 1.26^x$ b) 504.04ASA c) 27.97
8. $1013.2 \cdot 0.9999^x$