3.1 Logarithmen

Inhaltsverzeichnis

1 „Monate werden zu Tagen “

Betrachten wir folgende Tabelle:

2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}	2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}
0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Übung

1. Berechne folgende Produkte ohne Taschenrechner, nur mit Hilfe der Tabelle.

   a) $16 \cdot 256 =$ b) $0.25 \cdot 512 =$ c) $0.125 \cdot 4096 =$

2. Berechne das Produkt $16 \cdot 256$ mit Hilfe der schriftlichen Multiplikation. Vergleiche die Anzahl der Berechnungsschritte mit denjenigen der Aufgabe 1(a).

Diese Idee, eine Zahl einfach als Potenz zu einer bestimmten Basis zu schreiben und dann die Potenzregeln anzuwenden, brachte die Mathematik enorm voran. Die umfangreichen Berechnungen, die vor allem in der Astronomie (z.B. Keplersche Gesetze) notwendig waren, konnten stark vereinfacht und damit beschleunigt werden. Eine Aussage von Laplace (ein bedeutender Mathematiker um 1750), der mehr als 150 Jahre (!) später lebte, verdeutlicht den hohen Wert dieser Idee:

„Diese Erfindung verringert den Arbeitsaufwand von Monaten auf Tage. “

Die obige Tabelle taugt natürlich nur dazu, das Prinzip zu verdeutlichen. Sie ist sehr Lückenhaft, Berechnungen wie z.B. $327 \cdot 456$ können nicht durchgeführt werden.

Übung

3. Drücke die Zahl 5 als $2^{\cdots}$ aus, mit Hilfe der Hoch-Taste des TR. Berechne dabei 3 Stellen nach dem Komma (.,...).

Die letzte Übung hat uns gezeigt, wie mühsam einer solcher Exponent zu berechnen ist, wenn es “nicht schön aufgeht“. Bestimmte Mathematiker, die natürlich keinen TR hatten (für die war es also noch viel mühsamer), verbrachten fast ihr ganzen Leben damit, solche Tabellen möglichst lückenlos aufzustellen. Einer davon war Jost Bürgi aus der Schweiz:

Bürgi wartete allerdings bis ca. 1620 mit der Veröffentlichung seiner Tafel. Naper, ein anderer Mathematiker, veröffentlichte seine Tafel, die er unabhängig von Bürgi erstellt hatte, bereits um 1614.

2 Der Logarithmus

Als erstes wollen wir kurz den Bezug zum ersten Abschnitt herstellen. Bei der Übung 2 haben wir die Frage gestellt: $2^x = 5$. Dieser Zahl x sagen wir $\log_2 5$ (gesprochen: Der Logarithmus von 5 zur Basis 2). Wir definieren:

Definition 1

Am Anfang ist es schwierig, einen Logarithmus direkt aus der Definition zu berechnen. Wir werden deshalb ein Rezept kennenlernen.

Gehen wir als Hilfe schnell zum Wurzelbegriff zurück:

Nun zum Logarithmus:

Frage: Wieviel ist $\log_2 8$?

Antwort:

Wir müssen uns einfach überlegen: 2 hoch wieviel gibt 8 ? Das wir uns genau das überlegen müssen, ist wiederum Abmachungssache. Wir können hier also nicht herausfinden, was wir uns überlegen müssen !

Beispiele:

- $\log_3 9 =$
- $\log_4 64 =$

Übungen

4. Berechne die Werte der folgenden Logarithmen.

a) $\log_3 81 =$ b) $\log_5 25 =$ c) $\log_2 16 =$

d) $\log_{12} 144 =$ e) $\log_5 1 =$ f) $\log_{10} \frac{1}{10} =$

g) $\log_{0.5} 8 =$ h) $\log_{10} 0.01 =$ i) $\log_2 8^{12} =$

$[4, 2, 4, 2, 0, -1, -3, -2, 36]$

5. lg ist die Abkürzung für $\log_{10}$. Berechne die Werte der folgenden Logarithmen.

a) $\lg 10^7 =$ b) $\lg 10000 =$ c) $\lg 0.0001 =$

$[7, 4, -4]$

6. Berechne die Werte der folgenden Logarithmen ($a \in \mathbf{R}^+, n \in \mathbf{N}$).

a) $\log_a 1 =$ b) $\log_a a =$ c) $\log_a a^2 =$

d) $\log_a a^n =$ e) $\log_a \frac{1}{a} =$ f) $\log_a \frac{1}{a^2} =$

g) $\log_a \frac{1}{a^n} =$ h) $\log_a \sqrt{a} =$ i) $\log_a \sqrt[3]{a} =$

$[0, 1, 2, n, -1, -2, -n, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$

7. ln (natürlicher Logarithmus) ist die Abkürzung für $\log_e$, wobei $e = 2.71\ldots$ die Eulersche Zahl ist. Berechne die folgenden natürlichen Logarithmen.

a) $\ln e^2 =$ b) $\ln \frac{1}{e} =$ c) $\ln \sqrt{e} =$

d) $\ln e =$ e) $\ln(\ln(e)) =$ f) $e^{2\ln(e)} =$

g) $\ln 0 =$

$[2, -1, \frac{1}{2}, 1, 0, e^2, k.W.]$

8. Schreibe einen Logarithmus auf, der den folgenden Wert ergibt:

a) 4 b) -2 c) 1

9. Bestimme die Lösungsmenge der nachfolgenden Gleichungen in **R**. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = ... an.

a) $\log_x 64 = 3$ b) $\log_2 x = 3$ c) $\log_5 x = -2$
d) $\log_9 x = 0.5$ e) $\log_x 121 = 2$ f) $\log_{\sqrt{x}} 16 = 2$
g) $\log_{x^2} 49 = \frac{1}{2}$

$[\mathbf{L} = \{4\}, \mathbf{L} = \{8\}, \mathbf{L} = \{0.04\}, \mathbf{L} = \{3\}, \mathbf{L} = \{11\}, \mathbf{L} = \{16\}, \mathbf{L} = \{\pm 49\}]$

10. Löse die folgenden Gleichungen !

a) $\ln(x) = 0.5$ b) $\ln(e^x) = x$ c) $\ln(\ln(x)) = 1$

$[e^{0.5}, \mathbf{R}, e^e]$

11. Berechne die Werte der folgenden Logarithmen ohne Taschenrechner !

a) $4^{\log_4 7} =$ b) $10^{\log_{10} 121} =$ c) $100^{\log_{100} \sqrt{\pi}} =$
d) $a^{\log_a 7} =$ e) $e^{\ln 10} =$ f) $e^{\ln 5} =$

$[7, 121, \sqrt{\pi}, 7, 10, 5]$

3 Der Basiswechsel

Frage: Was ergibt $\log_3 7$? Der TR stellt leider nur der Logarithmus zur Basis 10 und den Logarithmus zur Basis e zur Verfügung (manche noch den Logarithmus zur Basis 2). Wie aber können wir einen Logarithmus zur Basis 3 berechnen ?

Wir konnten also den Logarithmus zur Basis 3 auf den Logarithmus zur Basis 10 umrechnen, der auf dem TR vorhanden ist.

Übung

12. Löse die folgenden 3 Teilaufgaben:
    a) Zwischen welchen beiden natürlichen Zahlen liegt $\log_5 27$?
    b) Berechne mit dem obigen Verfahren $\log_5 27$.
    c) $\log_3 7$ und $\log_5 27$ waren konkrete Beispiele. Kannst Du eine allgemeine Umrechnungsformel notieren für $\log_a b$?

Satz 1

Konkret sagt dieser Satz aus, dass es reicht, den Logarithmus zu einer (beliebigen !) Basis zu kennen. Dies war natürlich besonders von Vorteil, als die Tafeln noch von Hand berechnet wurden.

Übung

13. Berechne mit Hilfe des obigen Satzes die Werte der folgenden Logarithmen ! Runde das Ergebnis auf 2 Stellen nach dem Komma.
    a) $\log_4 9 =$ [1.58] b) $\log_2 15 =$ [3.91] c) $\log_3 12 =$ [2.26]
14. Berechne auf 4 Ziffern genau:
    a) $\log_3(\log_2 35) =$ b) $\log_5(5 - \log_4 7) =$
15. Die Höhe über dem Boden kann aus dem Luftdruck nach der Formel
$$h(p) = 18.4\,\text{km} \cdot \log_{10}\left(\frac{p_0}{p}\right)$$
    bestimmt werden; dabei ist p_0 der Luftdruck am Boden,p der Luftdruck am Messort und h die Höhe in km. In welcher Höhe befindet sich an einem Tag mit $p_0 = 1010$ hPa ein Messballon, wenn ein mitgeführtes Barometer einen Druck von 900 hPa anzeigt ?
16. Berechne ohne Taschenrechner.
    a) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 9 =$ b) $\log_a b \cdot \log_b a =$
    c) $\log_a(b^2) : \log_a b =$ d) $\log_a^3 b : \log_a b =$

4 Die Logarithmenregeln

Wir versuchen, die nachfolgenden Regeln mit Hilfe der folgenden Übung selber herauszufinden.

Übung

17. Fülle bei a) und b) die Lücke aus mit dem richtigen Zeichen: $+ | - | \cdot |$:. Setze bei c) die Zahlen 4 und 3 richtig in die Lücken ein. Überprüfe nachher Deine Lösung mit Nachrechnen.

    a) $\log_2(16 \cdot 8) = \log_2(16) \ldots\ldots \log_2(8)$

    b) $\log_2(16 : 8) = \log_2(16) \ldots\ldots \log_2(8)$

    c) $\log_2 4^3 = \ldots\ldots \log_2(\ldots\ldots)$

Es gelten die folgenden Logarithmenregeln:

Satz 2 *Es gelten die folgenden Gleichungen:*

- $\log_a(b \cdot c) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\log_a(b : c) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\log_a b^q = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Beweise

Übungen

18. Schreibe als ganze Zahl.

a) $\log_3(27\cdot 9) =$ b) $\log_2(8\cdot 16) =$ c) $\log_2\left(16^5\right) =$

d) $\log_4(2)+\log_4(8) =$ e) $\log_3(54)-\log_3(2) =$ f) $\log_2(48)-\log_2(3) =$

$[5,7,20,2,3,4]$

19. Wende die Logarithmengesetze (von links nach rechts) möglichst oft an.

a) $\log_a(bc) =$ b) $\log_a(b(c+d)) =$ c) $\log_a(pq+pr) =$

d) $\log_a\left(4x^2-9y^2\right) =$ e) $\log_a\dfrac{b}{c} =$ f) $\log_a\dfrac{b}{c+d} =$

g) $\log_a\dfrac{1-x^2}{x^2-y^2} =$ h) $\log_a b^3 =$ i) $\log_a(b+c)^4 =$

j) $\log_a\dfrac{1}{c^2} =$ k) $\log_a\sqrt{s} =$

$[\log_a b+\log_a c, \log_a b+\log_a(c+d), \log_a p+\log_a(q+r), \log_a(2x+3y)+\log_a(2x-3y), \log_a b-\log_a c, \log_a b-\log_a(c+d)]$

$[\log_a(1+x)+\log_a(1-x)-\log_a(x+y)-\log_a(x-y), 3\log_a b, 4\log_a(b+c), -2\log_a c, \frac{1}{2}\log_a s]$

20. Forme so um, dass im Ergebnis nur ein log-Zeichen vorkommt und dass vor dem log-Zeichen keine Zahl steht !

a) $\log_a m+\log_a n =$ b) $3\log_a m =$

c) $\dfrac{1}{2}\log_a m =$ d) $\log_a b+\log_a c-\log_a d-\log_a c =$

e) $3\log_a b+2\log_a c-4\log_a d =$ f) $2\log_a x+3\log_a y-5(\log_a u+\log_a v) =$

$[\log_a(mn), \log_a m^3, \log_a\sqrt{m}, \log_a\left(\frac{b}{d}\right), \log_a\left(\frac{b^3c^2}{d^4}\right), \log_a\left(\frac{x^2y^3}{u^5v^5}\right)]$

21. Gib x als Dezimalzahl an. Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

a) $x=\lg\left(2.46\cdot 10^{7890}\right)$ [7890.39] b) $x=\lg\left(9.87\cdot 10^{-6543}\right)$ [-6542.01]

c) $x=\ln\left(7.23\cdot 10^{5073}\right)$ [11682.99] d) $x=\log_2\left(2.84\cdot 10^{-4657}\right)$ [-15468.71]

5 Exponentialgleichungen

5.1 einfache Exponentialgleichungen

Beispiel: $5^x = 14$

Übungen

22. Löse die folgenden Exponentionalgleichungen. Runde Dein Ergebnis auf zwei Kommastellen. Kontrolliere Dein Ergebnis durch Einsetzen.

a) $2^x = 11$ b) $3^x = 0.052$ c) $0.8^x = 0.005$

d) $e^{-x} = 100$ e) $10^{\frac{1}{x}} = 0.1997$ f) $7^{\sqrt{x}} = 3$

[3.46,-2.69,23.74,-4.61,-1.43,0.32]

5.2 Exponentialgleichungen, die sich mit Zusammenfassen lösen lassen

Beispiel: $3^{2x} + 3^{2x+2} = 100$

Übungen

23. Löse die folgenden Exponentionalgleichungen. Runde Dein Ergebnis auf zwei Kommastellen. Kontrolliere Dein Ergebnis durch Einsetzen.

a) $2^{4x} + 2^{4x+5} = 99$ b) $5^{3x+1} - 5^{3x-1} = 48$ c) $5^{x-1} + 6^x = 6^{x+1} - 5^x$

[0.396;0.48;-7.83]

5.3 Exponentialgleichungen, die sich mit Substitution lösen lassen

Beispiel: $9^x - 2 \cdot 3^x - 8 = 0$

Übungen

24. Löse die folgenden Exponentionalgleichungen. Runde Dein Ergebnis auf zwei Kommastellen. Kontrolliere Dein Ergebnis durch Einsetzen.

    a) $10^x + 10^{2x} = 600$ b) $2^x + 3 = 4^x$ c) $e^x = 1 + e^{-x}$

    [1.38;1.20;0.48]

5.4 Exponentialgleichungen aus der Finanzmathematik

Beispiel

$$K_0 = R\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$

Übungen

25. Löse die folgenden Gleichungen nach n auf.

    a) $a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ b) $K_0 = Rq\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$

    $\left[n = \log_q\left(\frac{qa_n - a_n + a_1}{a_1}\right); n = \log_q\left(\frac{-Rq}{K_0 \cdot q - K_0 - R}\right)\right]$

6 Logarithmusgleichungen

Beispiel: $\log_a(x-3) - \log_a 6 = \log_a 7 - \log_a(x-4)$

Übungen

26. Löse die folgenden Gleichungen ($a \in \mathbf{R}^+$).

a) $3\log_a x = 2\log_a 8$

b) $\log_a(x+4) + \log_a(x) = \log_a(x+1)$

c) $\log_a x^2 - \log_a 8 = \log_a 8 - \log_a 27$

d) $\frac{1}{2}\log_a(x+1) = \log_a 10 - \log_a 2$

e) $\log_2(x+9) = 4 + \log_2(x-6)$

[4|0.30|±1.54|24|7]

7 Anwendungen von Logarithmen

7.1 Die Lautstärke

Die Lautstärke wird in W/m^2 gemessen. Die Messwerte, die dabei herauskommen, sind meist sehr kleine Zahlen. Mit Hilfe des Logarithmus rechnen wir diese Zahlen so um, dass wir besser handhabbare Zahlen erhalten. Die Umrechnungsformel sieht so aus:

$$L = 10\log\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

wobei:

- L : Lautstärke in dB (Dezibel)
- J : Schallintensität der Quelle (z.B. Sänger,Auto,...)
- J_0 : Schallintensität der Hörschwelle (das ist die Lautstärke, die gerade nicht mehr gehört wird)

27. Welche Lautstärken (in Dezibel) gehören zu folgenden Schallintensitäten J ?

    a) $J = J_0$ b) $J = 10 \cdot J_0$ c) $J = 100 \cdot J_0$

28. Welche Schallintensitäten J, ausgedrückt als Vielfache von J_0 gehören zu den folgenden Lautstärken ?

    a) 0 Dezibel (Hörschwelle)
    b) 20 Dezibel (Flüstersprache)
    c) 40 Dezibel (Unterhaltungssprache)
    d) 60 Dezibel (Schreibmaschinengeklapper)
    e) 80 Dezibel (Motorrad mit Schalldämpfer)
    f) 100 Dezibel (Motorrad ohne Schalldämpfer)
    g) 120 Dezibel (Flugzeugmotor in 4 m Abstand)
    h) 130 Dezibel (Schmerzgrenze)

29. Ein Sänger erzeugt eine Lautstärke von 65 Dezibel.

    a) Welche Lautstärke erzeugen 2 Sänger ? [68.01 dB]
    b) Wieviele Sänger braucht es für die Lautstärke 75 Dezibel ? [10 Sänger]

7.2 Die Berechnung der Anzahl Ziffern einer Zahl mit dem Zehner-Logarithmus

- $\log_{10} 500 = 2, \ldots$
- $\log_{10} 5000 = 3, \ldots$
- $\log_{10} 100 = 2$, hundert ist aber dreistellig
- $\log_{10} 1000 = 3$, tausend ist aber vierstellig

Mit folgendem Rezept kann man die Anzahl Ziffern berechnen:

Übung

30. Berechne die Anzahl Ziffern.

    a) 7^7 [6] b) $(9^9)^9$ [78]

31. Welche der beiden Zahlen ist grösser ?

    a) 2^{8000} oder 3^{1261} [>] b) 3^{10000} oder 4^{9000} [<]

8 Die Logarithmusfunktion

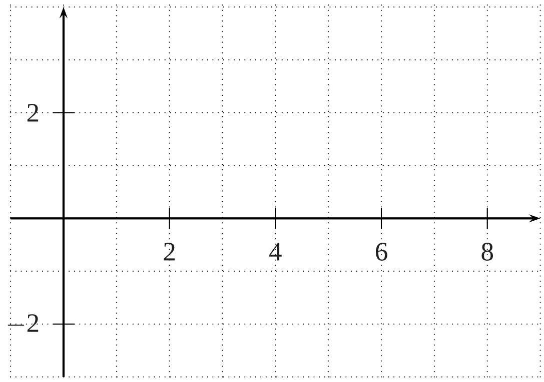
Die Logarithmusfunktion ist folgendermassen definiert:

Definition 2 *Eine Funktion heisst Logarithmusfunktion, wenn ihre Vorschrift folgende Form hat:*

Wie sieht der Graph einer Logarithmusfunktion aus ? Das kommt natürlich darauf an, welchen Wert wir für den Parameter a einsetzen. Setzen wir mal $a = 2$. Wir erhalten die folgenden Wertetabelle:

x	0.25	0.5	1	2	4	8	...
$\log_2 x$							

Wir zeichnen die Punkte ins Koordinatensystem ein:



32. Skizziere die Graphen der Funktionen f mit den folgenden Vorschriften:

    a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{0.5} x$

33. Stelle rechnerisch fest, ob der angegebene Punkt oberhalb, unterhalb oder auf dem Graphen mit der Vorschrift $f(x) = \log_2 x$ liegt.

    a) $P_1 = (7 \mid 3)$ [oberhalb] b) $P_2 = (32 \mid 5)$ [auf]

34. Bestimme, falls möglich, die Basis der Funktion f mit der Funktionsvorschrift $f(x) = \log_a x$, wenn der Punkt P auf dem Graphen der Funktion liegt.

    a) $P = (16 \mid 2)$ [$a = 4$] b) $P = (0.125 \mid 3)$ [$a = 0.5$]

9 Zusatzaufgaben

35. Wie heisst die Endziffer (=Einerziffer) von 5^{150}; welche Ziffer steht am Anfang ? (Hinweis: Betrachte den Zehnerlogarithmus dieser Zahl). [7]

36. Wieviele Endnullen hat die Zahl 50^{150} ? Mit welcher Ziffer beginnt sie ? [50,7]

37. Welches ist die erste und die letzte Ziffer von 2^{1000} ? [1,6]

38. Welches ist die erste und die letzte Ziffer von $(4^4)^4$,$(7^7)^7$ und $(3^4)^5$? [4,6;2,7;3,1]

10 Anhang

Artikel aus SPIEGELOnline zur grössten bisher gefundenen Primzahl.

(http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,443817,00.html)

9 808 358 Ziffern: Das ist die neueste grösste Primzahl. Zwei US-amerikanische Mathematiker haben „M32582657“ entdeckt - mit Hilfe von 700 Computern, die neun Monate lang gerechnet haben.

9 808 358 Stellen hat die neue grösste bekannte Primzahl. Damit ist sie zwar rund 650.000 Ziffern länger als die vorherige Rekordprimzahl - aber noch nicht lang genug, die erste Primzahl mit mehr als zehn Millionen Stellen sein. Für diesen Zahlenwurm hat die Electronic Frontier Foundation nämlich ein Preisgeld von 100000 US-Dollar (79 266 Euro) ausgelobt.

Rund 2500 eng bedruckte DIN-A4-Seiten würde die neu entdeckte 44. Mersenne-Primzahl umfassen. Neun Monate lang rechneten 700 Computer - dann spuckten die Rechner die neue Rekordprimzahl aus. Damit brachen die federführenden US-Mathematiker Curtis Cooper und Steven Boone von der Central Missouri State University ihren eigenen Weltrekord: Im Dezember 2005 hatten sie eine Primzahl mit 9 152 052 Ziffern entdeckt. Dass die kürzlich gefundene Zahl wirklich neuer Rekord ist, hätten Kollegen schon bestätigt, berichtet das Internet- Primzahlenprojekt Gimps (Great Internet Mersenne Prime Search).

Bei dem Rekord handelt es sich um die 44. bekannte sogenannte Mersenne-Primzahl. Solche - nach dem französischen Mönch Marin Mersenne - benannte Zahlen berechnen sich nach der Formel $2^n - 1$.

Die neue Rekordzahl ergibt sich aus $2^{32582657} - 1$ und wird deswegen „M32582657“ genannt. Diese Zahl von einem einzigen Computer berechnen zu lassen, hätte laut Gimps mehr als 4000 Jahre gedauert.

Aufgabe: Prüfe nach, ob die Zahl $2^{32582657} - 1$ wirklich 9 808 358 Ziffern hat.