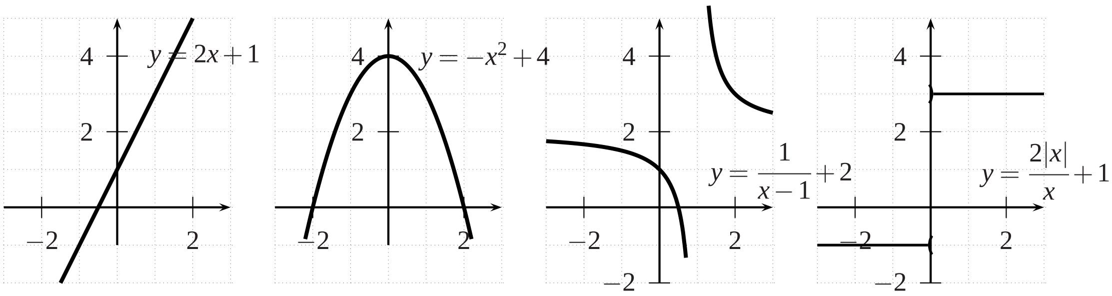
Thema aus dem Bereich Analysis -
3.9 Differentialrechnung I

Inhaltsverzeichnis

1 Stetigkeit

Wir werden unsere Untersuchungen in der Differential- und Integralrechnung vor allem bei stetigen Funktionen oder zumindest teilweise stetigen Funktionen durchführen. Stetig bedeutet, dass der Graph keine „Sprünge“ hat. Stellen, wo der Graph Sprünge hat, heissen Unstetigkeitsstellen.

Beispiele:



- Der erste Graph ist stetig auf ganz $\mathbf{R}$.
- Der zweite Graph ist stetig auf ganz $\mathbf{R}$.
- Der dritte Graph ist stetig auf $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, an der Stelle 1 hat er eine Unstetigkeitsstelle.
- Der vierte Graph ist stetig auf $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, an der Stelle 0 hat er eine Untstetigkeitsstelle.

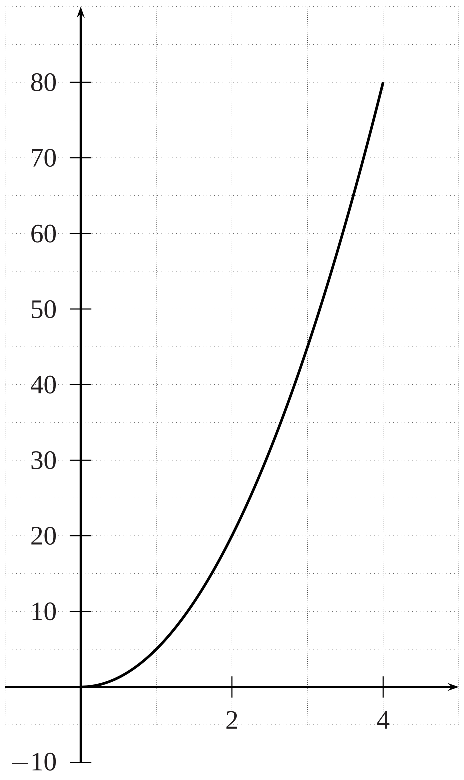
2 Der Differenzenquotient

Der italienische Mathematiker Galileo Galilei (1564-1642) untersuchte die Gesetze des freies Falls. Er führte seine Versuche an einer schiefen Ebene durch. Am schiefen Turm von Pisa soll er ebenfalls Fallversuche unternommen haben, aber das ist nicht belegt. Seine Versuche zeigten, dass der Fallweg s quadratisch mit der Zeit zunimmt. Das Weg Zeit-Gesetz des freien Falls lautet angenähert:

$$s(t) = 5t^2$$

Dabei ist t die Fallzeit in Sekunden und s der Fallweg in Metern.

Nehmen wir an, ein Stein wird von einem 80 m hohen Turm fallengelassen. Tragen wir ein paar Fallhöhen in die untenstehende Tabelle ein:



Fragen zum Einführungsbeispiel:

- Berechne:
  - Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Steins zwischen 0 und 2 Sekunden
  - Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Steins zwischen 1 und 3 Sekunden
  - Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Steins zwischen 2 und 3 Sekunden

Graphisch können wir die Durchnittsgeschwindigkeiten mit Hilfe von **Sekanten** darstellen.

Dem Ausdruck $\frac{\Delta s}{\Delta t}(x_0, x_1)$ sagen wir **Differenzenquotient** von $s(t)$ an den Stellen x_0 und x_1:

- Differenz, weil wir die Zeit- und Streckendifferenz nehmen.
- Quotient, weil wird diese beiden Grössen miteinander dividieren.

Der **Differenzenquotient** an den Stellen x_0 und x_1 liefert uns die durchschnittliche Steigung des Graphen zwischen den Stellen x_0 und x_1.

Wir notieren den Differenzenquotienten allgemein:

Definition 1 *Gegeben ist eine auf einem Intervall I stetige Funktion $f(x)$ und zwei Stellen $x_0, x_1 \in \boldsymbol{I}$. Wir definieren den **Differenzenquotienten** mit:*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Übungen

1. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Berechne für den Graphen der vorliegenden Funktion nun die Steigung der Sekanten zwischen den folgenden zwei Punkten und überprüfe Dein Ergebnis zeichnerisch:

   a) 0 und 1 [1]   b) -2 und -1.5 [-3.5]   c) x_0 und x_1 [$x_0 + x_1$]

2. Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Bevölkerungswachstums (Menschen pro Jahr) in den beiden Ländern für jedes Zeitintervall. Stelle einen Vergleich an.

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Indien	370	446	555	687	842	1003
USA	152	181	205	227	250	282

3. a) In welchem Intervall $[2, b]$ hat die durchschnittliche Steigung der Funktion $f(x) = x^2 + 5x - 8$ den Wert 12 ? [5]

   b) In welchem Intervall $[a, 1]$ hat die durchschnittliche Steigung der Funktion $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ den Wert -2 ? [0]

4. Ein Protein zerfalle gemäss

$$M(t) = \frac{28}{t+2}$$

   wobei $M(t)$ die Masse in Gramm und t die Zeit in Stunden ist.

a) Berechne die mittlere Reaktionsrate (in g/h) im Zeitintervall [0,2] ! [$-3.5g/h$]

b) In welchem Zeitintervall $[0,t]$ beträgt die mittlere Reaktionsgeschwindigkeit $-4g/h$? [$t = 1.5\,\mathrm{s}$]

5. Die folgende Tabelle zeigt einige Daten eines typischen Starts der amerikanischen Weltraumfähre Space-Shuttle:

Zeit $[min]$	Geschw. $[m/s]$
0	0
1	381
2	1216
3	1748
4	2100
5	2641

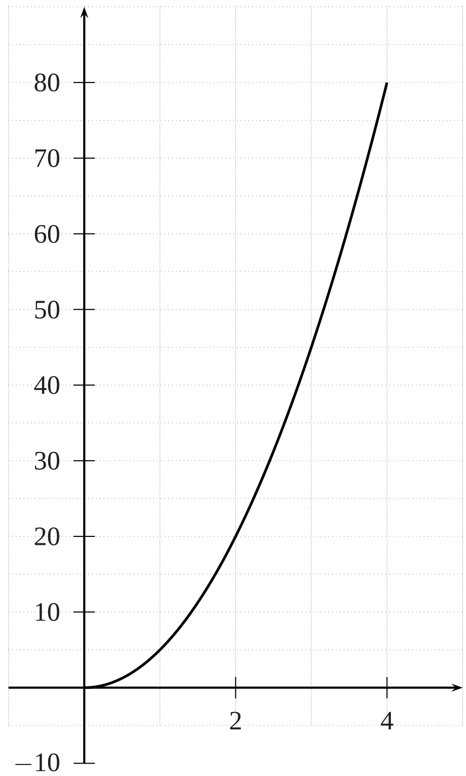
Wie gross ist die durchschnittliche Beschleunigung des Space-Shuttles zwischen den Zeitpunkten 2 und 4 ? [$7.37\,\mathrm{m/s^2}$]

3 Der Differentialquotient

Im vorderen Abschnitt wurde zu einer gegebenen Zeitspanne die durchschnittliche Geschwindigkeit ermittelt. Uns interessiert nun folgende Frage:

Wie gross ist die Geschwindigkeit des Steines nach exakt 3 Sekunden ? Beantworte die Frage zeichnerisch (mit Abschätzen) und rechnerisch.

- Zeichnerisch:



- Rechnerisch: Die Steigung der Tangenten kann nicht mit dem Differenzenquotienten ermittelt werden, weil wir nicht zwei Punkte haben. Die Steigung der Tangenten kann angenähert werden, indem man zwei Punkte nahe beieinander wählt. Exakt erhalten wir die Steigung der Tangenten, indem wir den Abstand zwischen den beiden Punkte gegen 0 gehen lassen.
  - Methode 1, Testeinsetzungen: Wir überlegen uns die Antwort mit Abschätzen:

    Annäherung von links:

$\frac{\Delta s}{\Delta t}(2,3)$	$\frac{s(3)-s(2)}{3-2} = \frac{45-20}{1} = 25$
$\frac{\Delta s}{\Delta t}(2.9,3)$	$\frac{s(3)-s(2.9)}{3-2.9} = \frac{45-42.05}{0.1} = 29.5$
$\frac{\Delta s}{\Delta t}(2.99,3)$	$\frac{s(3)-s(2.99)}{3-2.99} = \frac{45-44.7005}{0.01} = 29.95$

    Annäherung von rechts:

$\frac{\Delta s}{\Delta t}(3,4)$	$\frac{s(4)-s(3)}{4-3} = \frac{80-45}{1} = 35$
$\frac{\Delta s}{\Delta t}(3,3.1)$	$\frac{s(3.1)-s(3)}{3.1-3} = \frac{48.05-45}{0.1} = 30.5$
$\frac{\Delta s}{\Delta t}(3,3.01)$	$\frac{s(3.01)-s(3)}{3.01-3} = \frac{45.3005-45}{0.01} = 30.05$

    Wir nähern uns von links und von rechts also immer mehr der Zahl 30 an ($\lim\limits_{t\to 3^-} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{t\to 3^+} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 30$).

– Methode 2, Termumformung:

Wir sehen, dass die Fragen nach der durchschnittlichen Steigung **zwischen zwei Punkten** und der exakten Steigung **an einem Punkt** unterschiedlich zu bearbeiten sind. Die Antwort auf die erste Frage ist einfach, was man von der zweiten Frage nicht behaupten kann.

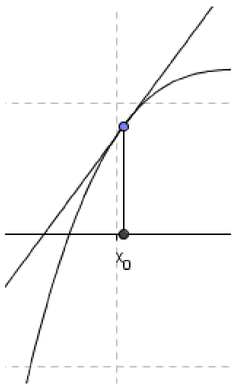
Die Frage nach der Tangentensteigung des Graphen an einem Punkt wird **Tangentenproblem** (Leibniz) oder das Problem der **Momentangeschwindigkeit** (Newton) genannt. Beide untersuchten dieses Problem unabhängig voneinander.

Wir führen nun eine neue Schreibweise ein:

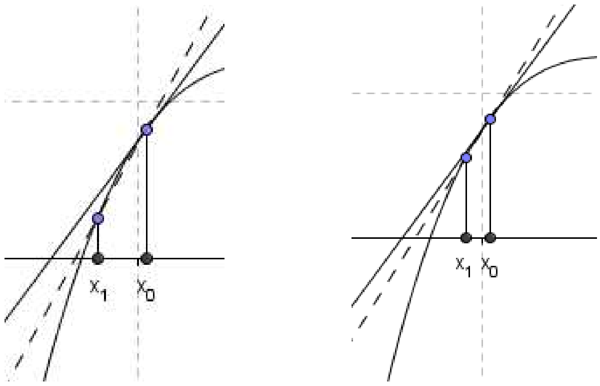
- Der Abstand Δt unterschreitet jede positive Zahl. Wir schreiben dann anstelle des Δ ein kleines d. Damit wird $\Delta s/\Delta t$ zu $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$. Diesem neuen Ausdruck sagen wir **Differentialquotient** (anstatt Differenzenquotient).

Wir wollen nun den Differentialquotienten allgemein formulieren, mit Hilfe des konkreten Einführungsbeispiels.

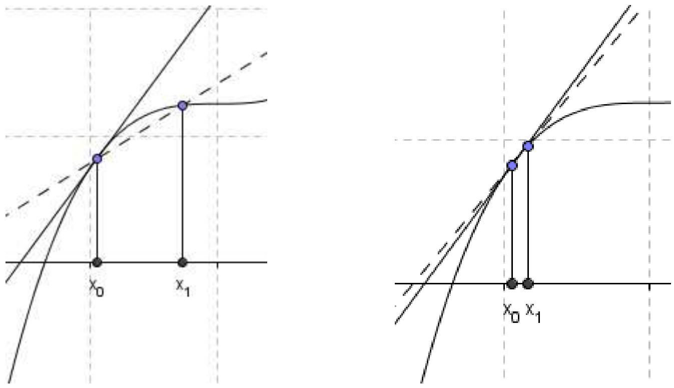
- Im obigen Beispiel entsprach der Differentialquotient der Geschwindigkeit. Im allgemeinen Fall können wir das nicht mehr konkret sagen. Wir sprechen einfach von der Steigung des Graphen (Tangentensteigung) an der Stelle x_0.
- Wir haben eine Funktion $f(x)$ und betrachten die Steigung des Graphen an der Stelle x_0 (im obigen Beispiel hatten wir $s(t)$ und $t_0 = 5$).



- Wir können uns der Tangente von links annähern, dann strebt x_1 gegen x_0^-. Dies notieren wir mit $\lim_{x_1 \to x_0^-}$. Graphisch:



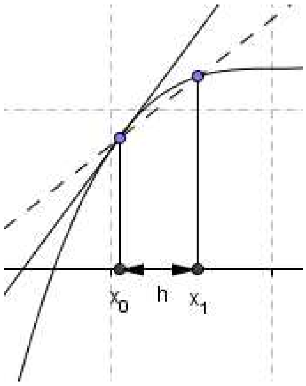
- Wir können uns der Tangente von rechts her annähern, dann strebt x_1 gegen x_0^+. Dies notieren wir mit $\lim_{x_1 \to x_0^+}$. Graphisch:



Wenn wir den links- und rechtsseitigen Grenzwert zusammenfassen, erhalten wir:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Für die konkreten Berechnungen ist es von Vorteil, den Differentialquotienten noch ein wenig umzuschreiben.



Wir setzen: $x_1 - x_0 = h$. Nach x_1 aufgelöst erhalten wir: $x_1 = x_0 + h$ (dem aufmerksamen Schüler wird nicht entgangen sein, dass man auch noch den Fall $x_1 < x_0$ anschauen müsste. Diesen Fall lassen wir der Einfachheit halber weg). Damit erhalten wir:

Definition 2 *Gegeben ist eine auf einem Intervall I definierte Funktion f. Der Differentialquotient an der Stelle $x_0 \in I$ ist folgendermassen definiert:*

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Existiert dieser Grenzwert und ist endlich, dann sagen wir, dass f an der Stelle x_0 ***differenzierbar*** *ist. Dieser Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ notiert und* ***Ableitung*** *von f an der Stelle x_0 genannt.*

Bemerkung Es sind auch andere Schreibweisen anzutreffen. Inbesondere wird in der Physik bei Funktionen, die von t abhängen (z.B. $s(t), a(t), \ldots$) die Ableitung mit einem Punkt notiert (z.B. $\dot{s}(t), \dot{a}(t)$)

Übungen

6. Skizziere zuerst den Graphen und schätze mit der Tangente ab, wie gross die Steigung an der angegebenen Punkten ist. Berechne anschliessend den Differentialquotienten der Funktion f an der Stelle x_0 und vergleiche die Ergebnisse.

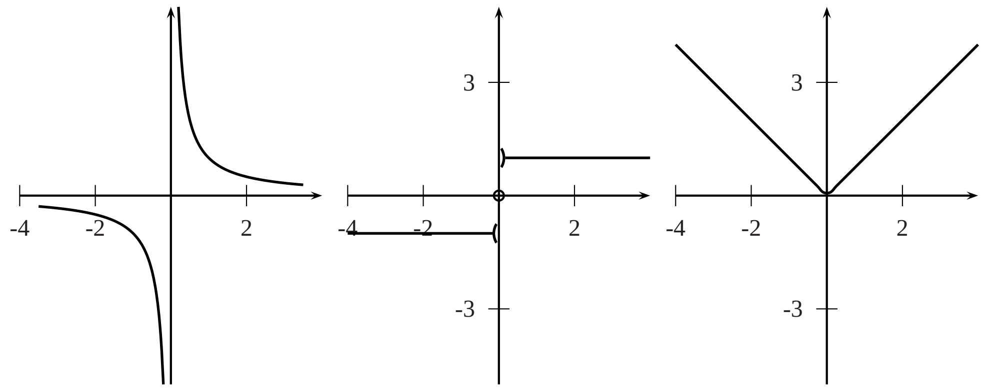
   a) $f(x) = x^2, x_0 = 1.$ [2]

   b) $f(x) = -x^2 + 1, x_0 = -2.$ [4]

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, x_0 = 1.$ [−1]

7. Das Zeit-Weg-Gesetz für ein Fahrzeug lautet: $s(t) = t^2 + 3t$ (t in Sekunden Sekunden, $s(t)$ in Meter). Berechne die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 2$. [7 m/s]

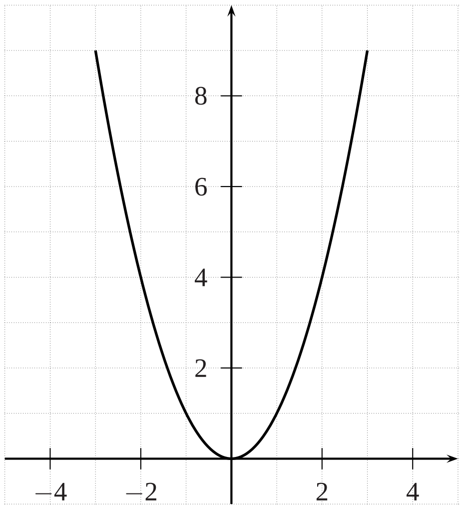
8. An welchen Stellen existiert bei den folgenden Funktionen die Ableitung nicht ?

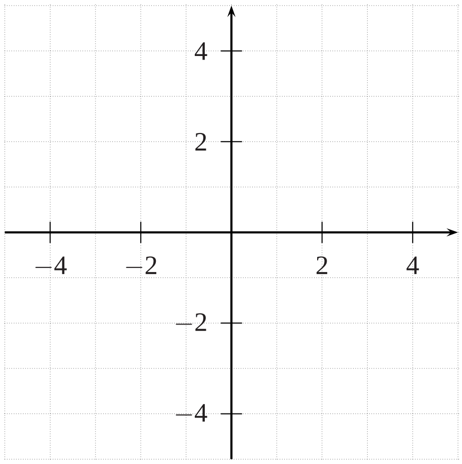


9. Existiert die Ableitung der Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 (Hinweis: Berechne den linkseitigen und rechtsseitigen Grenzwert einzeln und vergleiche dann) ?

4 Die Ableitungsfunktion

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Gesucht ist eine Funktion, die dem Graphen von f an jeder Stelle x die Steigung der Tangente zuordnet.





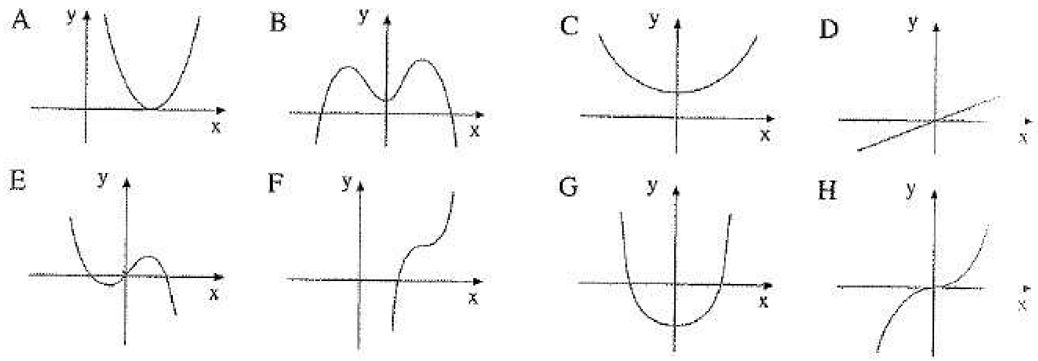
Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ist also eine Formel, mit der man die Tangentensteigungen von f ermitteln kann. Sie ordnet einem x die Tangentensteigung von f an der Stelle x zu.

Übungen

10. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - x$. Ermittle graphisch die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

11. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Ermittle graphisch die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

12. Die Abbildungen zeigen vier Funktionen und vier passende Ableitungsfunktionen. Bilde jeweils ein Paar und begründe Deine Wahl.



13. Ermittle die Ableitungsfunktionen $f'(x)$ mit Hilfe des Differentialquotienten.

a) $f(x) = x$ [1] b) $f(x) = x^2$ [$2x$] c) $f(x) = x^3$ [$3x^2$]

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ [$-\frac{1}{x^2}$] e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ [$-\frac{2}{x^3}$] f) $f(x) = \sqrt{x}$ [$\frac{1}{2\sqrt{x}}$]

14. Unsere Ergebnisse aus der obigen Aufgaben sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Kannst Du eine Gesetzmässigkeit erkennen, um aus der Funktion f die Funktion f' zu ermitteln ?

$f(x)$	x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	1	$2x$	$3x^2$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5 Lernziele

- Ich weiss, was ein Differenzenquotient ist und was man mit ihm berechnen kann.
- Ich kenne die Fragestellung der Differenzialrechnung.
- Ich weiss, was mit Tangentenproblem und Momentangeschwindigkeit gemeint ist.
- Ich kann die Steigung des Graphen an einer Stelle abschätzen.
- Ich weiss, was ein Differentialquotient ist und was man mit ihm berechnen kann.
- Ich kenne den Unterschied zwischen dem Differenzen- und dem Differentialquotient.
- Gegeben ist die Vorschrift einer Funktion. Ich kann rechnerisch die Steigung an einer bestimmten Stelle ermitteln.
- Ich verstehe den Begriff Ableitung.
- Ich kann aufgrund des Graphen einer Funktion f bestimmen, ob die Ableitung an **jeder** Stelle existiert.