2.6 Potenzen

(Thema aus dem Bereichen Algebra)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in den Begriff der Potenz

Zahlen können unterschiedlich geschrieben werden. Wir kennen bis jetzt die Dezimalschreibweise und die Bruchschreibweise. In der Dezimalschreibweise notieren wir z.B. 0.25, während wir in der Bruchschreibweise die gleiche Zahl mit $\frac{1}{4}$ darstellen. Beide Schreibweisen habe ihre Vor- und Nachteile, so kann z.B. $\frac{1}{3} : \frac{1}{7}$ in der Bruchschreibweise leicht berechnet werden, während dies in der Dezimalschreibweise mit mehr Aufwand verbunden ist. Wir lernen nun noch eine weitere Schreibweise für (geeignete) Zahlen kennen: Wir schreiben Zahlen als Potenzen. Diese neue Schreibweise eignet sich z.B. besonders, um sehr grosse oder sehr kleine Zahlen darzustellen. Ebenfalls können Potenzen bei entsprechenden Voraussetzungen mit vergleichsweise wenig Aufwand multipliziert werden.

2 Repetition: Potenzen mit natürlichen Exponenten

Definition 1 *Das Produkt von gleichen Termen wird folgendermassen zusammengefasst:*

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n-mal} = a^n$$

Wir erhalten sofort das erste Potenzgesetz:

Satz 1 *$m, n \in \boldsymbol{N}$, $a \in \boldsymbol{R}$. Dann gilt:*

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m} \text{ (N1)}}$$

Beweis

- $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n-mal} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{m-mal} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{(n+m)-mal} = a^{n+m}$

Weiter gilt:

Satz 2 *$m, n \in \boldsymbol{N}$, $n > m$, $a \in \boldsymbol{R}$. Dann gilt:*

$$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m} \text{ (N2)}}$$

Beweis

- $a^n : a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{m-mal}} = a^{n-m}$

Das dritte Gesetz:

Satz 3 $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (\text{N3})}$$

Beweis

- $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot .... \cdot a^n}_{m-mal} = a^{\overbrace{n+n+n+...+n}^{m-mal}} = a^{m \cdot n}$

Es folgen noch zwei Potenzgesetze zu Potenzen mit gleicher Basis.

Satz 4 $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n \quad (\text{N4})}$$

Beweis

- $a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n-mal} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot .... \cdot b}_{n-mal} = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ... \cdot ab}_{n-mal} = (ab)^n$

Satz 5 $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

$$\boxed{a^n : b^n = (a:b)^n \quad (\text{N5})}$$

Beweis

- $a^n : b^n = \dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot .... \cdot b}_{n-mal}} = \underbrace{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot ... \cdot \dfrac{a}{b}}_{n-mal} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = (a:b)^n$

Übungen

1. Schreibe als Potenz der Form a^b.

a) $2^{12} \cdot 2^{25} =$	b) $a^{12} \cdot a^3 =$
c) $x^5 \cdot x =$	d) $(x+1)^3 \cdot (x+1)^9 =$
e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}^4 \cdot \sqrt{5}^7 =$	f) $x^{2n+1} \cdot x^{11-n} =$
g) $5^{12} : 5^9 =$	h) $\sqrt{2}^{40} : \sqrt{2}^6 =$
i) $a^{2n} : a^{2n-1} =$	j) $(a+b)^7 : (a+b)^4 =$

$[2^{37}, a^{15}, x^6, (x+1)^{12}, 5^6, x^{n+12}, 5^3, 2^{17}, a, (a+b)^3]$

2. Schreibe als Potenz der Form a^b.

a) $15^3 \cdot 2^3 =$

b) $0.01^6 \cdot 1000^6 =$

c) $\sqrt{12}^3 \cdot \sqrt{3}^3 =$

d) $\left(\sqrt{5}+1\right)^4 \left(\sqrt{5}-1\right)^4 =$

e) $6^9 : 3^9 =$

f) $\sqrt{8}^7 : \sqrt{2}^7 =$

g) $(4abc)^n : (2ac)^n =$

$[30^3, 10^6, 6^3, 4^4, 2^9, 2^7, (2b)^n]$

3. Schreibe als Potenz der Form a^b.

a) $(a^3)^8 =$

b) $(x^6)^6 =$

c) $(x^2)^{n+1}$

d) $(n^n)^n$

$[a^{24}, x^{36}, x^{2n+2}, n^{n^2}]$

4. Schreibe so um, dass im Schlussergebnis nur ein Exponent und keine Klammer vorkommt.

a) $(-a^4)^3 =$

b) $((-a)^4)^3 =$

$[-a^{12}, a^{12}]$

5. Schreibe als Dezimalzahl. Die Variable n steht jeweils für eine natürliche Zahl.

a) $(-1)\cdot(-1)^3\cdot(-1)^5 =$

b) $(-1)^{4n}$

c) $\left(\frac{x-1}{1-x}\right)^{2n} =$

$[-1, 1, 1]$

6. Finde mit Hilfe der Potenzgesetze heraus: Welche(r) Zahl/Term muss für x eingesetzt werden, damit die Gleichung erfüllt ist ?

a) $3^6 \cdot 3^2 = 3^n$

b) $9 \cdot 2^7 + 7 \cdot 2^7 = 2^n$

c) $5 \cdot 5^{20} + 20 \cdot 5^{20} = 5^n$

d) $2^{a+4} - 8 \cdot 2^a = 2^x$

e) $\left(5^3\right)^4 : \left(5^2\right)^5 = 5^x$

f) $\left(100^{100}\right)^{100} = 10^x$

$[8, 11, 22, a+3, 2, 20000]$

7. Entscheide, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und begründe Deine Entscheidung.

a) $2^{500} < 8^{167}$ [r]

b) $2^{1000} < 10^{300}$ [f]

c) $4.5 \cdot 10^{55} \cdot 4 \cdot 10^{54} < 10^{100}$ [f]

d) $0.5 \cdot 10^{155} \cdot 4 \cdot 10^{154} = \left(3 \cdot 10^{77}\right)^2$ [f]

e) $\left(2^{99}\right)^{101} = \left(2^{101}\right)^{99}$ [r]

f) $\left(5^5\right)^5 = 5^{\left(5^5\right)}$ [f]

8. Berechne ohne TR: Wieviele Sekunden benötigt ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde, wenn die (mittlere) Entfernung der Erde von der Sonne $1.5 \cdot 10^{11}$ m und die Lichtgeschwindigkeit $3 \cdot 10^8$ m/s betragen ? [500 s]

9. Aus wievielen Ziffern besteht die Zahl

   a) 100^{100} ? [201] b) 1000^{1000} ? [3001]

10. Beantworte mit ja oder nein und begründe: Ist 2^{18}

    a) eine Quadratzahl ? b) eine Kubikzahl ?

3 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Wir haben die Potenzgesetze bis jetzt erst für die natürlichen Zahlen definiert. Beim Satz 2 gilt zusätzlich die Bedingung, dass $n > m$ sein muss, weil sonst ein negativer Exponent aufgetreten wäre. Schauen wir mal, was es geben würde, wenn $m > n$ ist. Wir wählen $m = 3$ und $n = 2$:

$$3^2 : 3^3 = 3^{-1}$$

Mit welcher Zahl aus dem Dezimalsystem können wir 3^{-1} sinnvoll darstellen („übersetzen“) ?

$3^2 : 3^3 = 9 : 27 = \frac{1}{3}$. Die geeignete Zahl ist also $\frac{1}{3}$. Ein weiteres Beispiel:

$$3^2 : 3^4 = 3^{-2}$$

Mit welcher Zahl aus dem Dezimalsystem können wir 3^{-2} sinnvoll darstellen ? $3^2 : 3^4 = 9 : 81 = \frac{1}{9}$. Die geeignete Zahl ist also $\frac{1}{9}$ oder $\frac{1}{3^2}$. Somit legen wir fest:

Definition 2 *$a \in \boldsymbol{R}^+$, $n \in \boldsymbol{N}$. Dann legen wir fest:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Wählen wir $n = m$. Dann erhalten wir z.B.:

$$3^2 : 3^2 = 3^0$$

Mit welcher Zahl aus dem Dezimalsystem können wir 3^0 sinnvoll übersetzen ? $3^2 : 3^2 = 9 : 9 = 1$. Die geeignete Zahl ist also 1. Somit legen wir fest:

Definition 3 *$a \in \boldsymbol{R}^+$. Wir definieren:*

$$a^0 = 1$$

Wir können unsere Regeln erweitern:

Satz 6 *Es seien $a \in \boldsymbol{R}^+, b \in \boldsymbol{R}^+; z_1, z_2 \in \boldsymbol{Z}$. Dann gilt:*

$$\boxed{\begin{array}{c} a^{z_1} \cdot a^{z_2} = a^{z_1+z_2} \ \text{(Z1)} \\ a^{z_1} : a^{z_2} = a^{z_1-z_2} \ \text{(Z2)} \\ (a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1 \cdot z_2} \ \text{(Z3)} \\ a^{z_1} \cdot b^{z_1} = (ab)^{z_1} \ \text{(Z4)} \\ a^{z_1} : b^{z_1} = (a:b)^{z_1} \ \text{(Z5)} \end{array}}$$

Die Sätze lassen sich mit den gleichen Ideen wie die Sätze 1-5 beweisen, jedoch aufwendiger. Wir verzichten an dieser Stelle auf diese Beweise.

Übungen

11. Schreibe als gewöhnlichen Bruch oder, wenn möglich, als ganze Zahl.

a) $2^{-3} =$
b) $3^{-2} =$
c) $-2^{-3} =$
d) $(-2)^{-2} =$
e) $(-3)^{-3} =$
f) $3^0 =$
g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$
h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

$[\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{27}, 1, 8, 9]$

12. Schreibe als Potenz mit einer möglichst kleinen natürlichen Zahl als Basis und einem Exponenten aus **Z**.

a) $\frac{1}{9} =$
b) $\frac{1}{7} =$

$[3^{-2}, 7^{-1}]$

13. Gib die Wissenschaftliche Darstellung der Zahl an. Ein Beispiel: $0.00745 = 7.45 \cdot 10^{-3}$

a) 0.91 =
b) 0.0669 =
c) 0.00000013456 =
d) $25.27 \cdot 10^{-7} =$
e) $0.099 \cdot 10^{-12} =$
f) $0.0055 \cdot 10^{-6} =$
g) $909.09 \cdot 10^{-4} =$
h) $0.0000032 \cdot 10^{4} =$
i) 11200000000 =
j) 8145060 =

$[9.1 \cdot 10^{-1}, 6.69 \cdot 10^{-2}, 1.3456 \cdot 10^{-7}, 2.527 \cdot 10^{-6}, 9.9 \cdot 10^{-14}, 5.5 \cdot 10^{-9}, 9.0909 \cdot 10^{-2}, 3.2 \cdot 10^{-2}, 1.12 \cdot 10^{10}, 8.15 \cdot 10^{6}]$

14. Ordne die Zahlen $3^{-3}, 10^{-3}, 2^{-4}, 2^{-10}, 10^{-2}, 3^{-2}$ nach aufsteigender Grösse.

$[2^{-10} < 10^{-3} < 10^{-2} < 3^{-3} < 2^{-4} < 3^{-2}]$

15. Berechne für $x = -2, -3$

a) $27 \cdot 3^x$ b) $2^x + 2^{-x}$

$[3, 1, 4.25, 8.125]$

16. Das Produkt aller Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen ist gleich 2^{14}. Fülle die Tabelle aus.

2^{11}	2^{-2}		2^8
2^0			2^3
		2^2	2^7
2^{-1}	2^{10}		

$[2^{-3}, 2^5, 2^6, 2^4, 2, 2^9, 2^{-4}]$

17. Bringe die folgenden Terme auf die Form a^b ($n \in \mathbf{N}$).

a) $2^5 \cdot 2^{-8} =$ b) $5^{-4} \cdot 5^{-6} =$
c) $3^{-6} \cdot 3^6 =$ d) $a^{-3} \cdot a^n =$
e) $2^{n+3} \cdot 2^{-3} =$ f) $x^{-n} \cdot x^{-n} =$
g) $4^5 : 4^{-1} =$ h) $5^{-4} : 5^{-3} =$
i) $a^n : a^{n-1} =$ j) $d^3 : d^{-n} =$

$[2^{-3}, 5^{-10}, 1, a^{n-3}, 2^n, x^{-2n}, 4^6, 5^{-1}, a, d^{n+3}]$

18. Bringe die folgenden Terme auf die Form a^b ($n \in \mathbf{N}$).

a) $\left(3^{-2}\right)^{-3} =$ b) $\left(6^{-2}\right)^3 =$
c) $\left(5^3\right)^{-2} =$ d) $\left(7^0\right)^{-7} =$
e) $\left(a^{-2}\right)^n =$ f) $\left(b^{-n}\right)^{-2} =$
g) $\left(c^2\right)^{n-1} =$ h) $\left(d^{3n}\right)^{-2} =$

$[3^6, 6^{-6}, 5^{-6}, 1, a^{-2n}, b^{2n}, c^{2n-2}, d^{-6n}]$

19. Forme so um, dass im Schlussergebnis keine Klammer und nur ein Exponent vorkommt.

a) $\left(-10^4\right)^5 =$ b) $\left((-10)^4\right)^5 =$
c) $\left(-10^5\right)^{-4} =$ d) $\left((-10)^{-5}\right)^{-4} =$

$[-10^{20}, 10^{20}, 10^{-20}, 10^{20}]$

20. Bringe die folgenden Terme auf die Form a^b ($n \in \mathbf{N}$).

a) $4^{-6} \cdot 2.5^{-6} =$ b) $5^{-10} \cdot 1.4^{-10} x^{-10} =$
c) $12^{-x} : 6^{-x} =$ d) $18^{-2n} : 6^{-2n} =$

$[10^{-6}, (7x)^{-10}, 2^{-x}, 3^{-2n}]$

21. Forme so um, dass im Schlussergebnis nicht mehr weiter zusammenfasst werden kann und dass keine Klammern und keine negativen Exponenten vorkommen.

a) $(4a^{-3} \cdot 5a^2) : 10a^3 =$
b) $(10a^{-3} + 4a^{-2}) \cdot 2a^3 =$
c) $(10a^{-3} + 4a^{-2}) : 2a^3 =$
d) $(10a^{-3} : 5a^{-2}) \cdot 2a^3 =$
e) $(10a^{-3} : 5a^{-2}) : 2a^3 =$
f) $(a^{2n+1} \cdot a^{-n}) : a^2 =$
g) $(a^{2n+1} : a^{2n-1}) : a^2 =$

$[\frac{2}{a^4}, 8a+20, \frac{5}{a^6} + \frac{2}{a^5}, 4a^2, \frac{1}{a^4}, a^{n-1}, 1]$

22. Schreibe als gewöhnlichen Bruch.

a) $\left(\frac{x}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{x}{6}\right)^{-2} =$ $[\frac{1}{4}]$
b) $\left(\frac{x}{2}\right)^{-4} : \left(\frac{x}{6}\right)^{-4} =$ $[\frac{1}{81}]$

23. Schreibe als Dezimalzahl. Begründe jeden einzelnen Schritt mit einer Potenzregel oder einer Definition.

a) $(a-b)^{10} : (b-a)^{10} =$ [1]
b) $(a-b)^7 \cdot (b-a)^{-7} =$ [-1]

24. Forme so um, dass im Schlussergebnis nicht mehr weiter zusammengefasst werden kann und dass keine Klammern und keine negativen Exponenten vorkommen.

a) $(1+x^{-3})^2 =$
b) $(x+x^{-1})^3 =$
c) $(x^4+2x^{-1})^3 =$

$[1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}, x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}, x^{12} + 6x^7 + 12x^2 + \frac{8}{x^3}]$

25. Löse die untenstehenden Gleichungen in $\mathbf{R}$.

a) $2^x = 2^{-5}$
b) $\frac{1}{64} = 2^x$
c) $2^{-12} \cdot 2^{-x} = 2^6$
d) $(2^2)^x = 1$
e) $2^{(2^x)} = 2$
f) $2^{(x^2)} = 2$
g) $(2^x)^2 = \frac{1}{16}$
h) $2^x = 0.5$
i) $2^6 = 2^{4x-2}$
j) $10^{5x-2.5} = 10^{4x-1}$
k) $3^{4x} = 9^{x+5}$
l) $0.1^x = 1000$
m) $5^{x+2} \cdot 25^{-x} = 125$
n) $4 \cdot 2^x \cdot 32 = 4^x$

$[-5, -6, -18, 0, 0, \pm 1, -2, -1, 2, 1.5, 5, -3, -1, 7]$

26. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch ? Begründe Deine Entscheidung.

a) $10^{-100} = 100^{-50}$ [w]
b) $(-3^4)^3 = (-3^3)^4$ [f]
c) $2^{-10} < 30^{-2}$ [w]

27. Die Kante eines sehr kleinen Würfels misst 10^{-4} mm. Berechne dessen Oberfläche S und dessen Volumen V. Gib Dein Ergebnis in der Form $a \cdot 10^b$ an. $[6 \cdot 10^{-8}\,\text{mm}^2, 10^{-12}\,\text{mm}^3]$

28. Das Volumen eines Würfels beträgt $2.7 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3$. Berechne ohne TR die Würfelkante k. $[3 \cdot 10^{-4}\,\text{m}]$

29. Gegeben sind das Volumen $V_P = 4 \cdot 10^{-45}\,\text{m}^3$ eines Protons, das Volumen $V_E = 10^{21}\,\text{m}^3$ der Erde und das Volumen $V_U = 4 \cdot 10^{78}\,\text{m}^3$ des Universums.
   a) Wie oft ist das Volumen des Protons in demjenigen der Erde enthalten ? $[2.5 \cdot 10^{65}]$
   b) Wie oft ist das Volumen des Protons in demjenigen des Universums enthalten ? $[10^{123}]$
   c) Wie oft ist das Volumen der Erde in demjenigen des Universums enthalten ? $[4 \cdot 10^{57}]$

30. Ein 10^{-4} m dickes Papier hat eine Fläche von $1\,\text{km}^2$. Es soll, wenigstens in Gedanken, 41 mal so gefaltet werden, dass sich die Dicke bei jeder Faltung verdoppelt. Berechne die Höhe des so entstandenen Papierturmes in km. $[\approx 2.2 \cdot 10^5\,\text{km}]$

31. Ein Würfel mit 1 cm Kantenlänge soll vollständig mit Protonen ($V_P = 4 \cdot 10^{-45}\,\text{m}^3, m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$) gefüllt werden. Berechne ohne TR: Wie gross ist dann die Masse dieses Würfels (Hinweis $1.7 \cdot 2.5 = 4.25$) ? $[4.25 \cdot 10^{11}\,\text{kg}]$

4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir können nun schon mit recht vielen Potenzen umgehen, nebst denen mit natürlichen Exponenten haben wir auch mit negativen ganzzahligen Exponenten und dem Exponenten 0 umzugehen gelernt. Unsere nächste Frage: Können wir auch Potenzen mit rationalen Exponenten sinnvoll übersetzen in die Dezimalschreibweise ?

Nehmen wir z.B. $4^{\frac{1}{3}}$

- Was würde es geben, wenn wir das erste Potenzgesetz anwenden ?
  $4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 4^1 = 4$
- Welche Zahl, die dreimal mit sich selber multipliziert wird, gibt 4 ? Natürlich ist das die dritte Wurzel von 4.
- $4^{\frac{1}{3}}$ schreiben wir also in der Dezimalschreibweise als $\sqrt[3]{4}$.

Ein zweites Beispiel: $4^{\frac{2}{3}}$

- $4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = 4^2 = 16$
- Welche Zahl, die dreimal mit sich selber multipliziert wird, gibt 16 ? Natürlich ist das die dritte Wurzel von 16.
- $4^{\frac{2}{3}}$ schreiben wir also in der Dezimalschreibweise als $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4^2}$.

Überlegen wir uns noch einen negativen gebrochenen Exponenten: $4^{-\frac{2}{3}}$

- $4^{-\frac{2}{3}} \cdot 4^{-\frac{2}{3}} \cdot 4^{-\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$
- Welche Zahl, die dreimal mit sich selber multipliziert wird, gibt $\frac{1}{16}$? Natürlich ist das die dritte Wurzel von $\frac{1}{16}$.
- $4^{-\frac{2}{3}}$ schreiben wir also in der Dezimalschreibweise als $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$.

Wir definieren:

Definition 4 *Es sei $a \in \mathbf{R}_0^+; m, n \in \mathbf{N}$. Dann definieren wir:*

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Definition 5 *Es sei $a \in \mathbf{R}_0^+; m, n \in \mathbf{N}$. Dann definieren wir:*

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Übungen

32. Berechne ohne Verwendung der Wurzelfunktion des TR.

    a) $49^{\frac{1}{2}}$ b) $27^{\frac{1}{3}}$

    c) $10000^{\frac{1}{4}}$ d) $64^{-\frac{1}{3}}$

    e) $1.44^{\frac{1}{2}} =$ f) $0.125^{\frac{1}{3}} =$

    $[7, 3, 10, 0.25, 1.2, 0.5]$

33. Berechne ohne Verwendung der Wurzelfunktion des TR.

    a) $8^{\frac{2}{3}} =$ b) $32^{-\frac{2}{5}} =$

    c) $121^{1.5} =$ d) $125^{\frac{4}{3}} =$

    $[4, 0.25, 1331, 625]$

34. Ordne die Potenzen $64, 64^0, 64^{-1}, 64^1, 64^{1.5}, 64^{-1.5}$ ohne Hilfe des TR nach aufsteigender Grösse. Überprüfe Dein Ergebnis mit dem TR.

Mit den oben getroffenen Definitionen können die Potenzgesetze noch einmal erweitert werden, nämlich auf den Zahlenbereich der rationalen Zahlen.

Satz 7 *(2.Erweiterung der Potenzregeln).* $a \in \boldsymbol{R}_0^+, b \in \boldsymbol{R}^+$, $q_1, q_2 \in \boldsymbol{Q}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{q_1+q_2} \ \text{(Q1)} \\ a^{q_1} : a^{q_2} = a^{q_1-q_2} \ \text{(Q2)} \\ (a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 \cdot q_2} \ \text{(Q3)} \\ a^{q_1} \cdot b^{q_1} = (ab)^{q_1} \ \text{(Q4)} \\ a^{q_1} : b^{q_1} = (a:b)^{q_1} \ \text{(Q5)} \end{array}}$$

Übungen

35. Schreibe als Potenz mit rationalem Exponenten bzw. als ganze Zahl wenn möglich.

a) $10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{6}} =$
b) $7^{1.4} \cdot 7^{1.5} \cdot 7^{0.6} =$
c) $2^{\frac{9}{4}} \cdot 2^{\frac{9}{5}} =$
d) $5^{0.2} \cdot 5^{-0.5} =$
e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} =$
f) $\sqrt[4]{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{5}+1} =$
g) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} =$
h) $4^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}} =$
i) $5^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{3}{4}} =$
j) $5^{-0.5} \cdot 20^{-0.5} =$
k) $\sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15} =$
l) $\sqrt[4]{50} : \sqrt[4]{2} =$

$[10^{\frac{1}{2}}, 7^{\frac{7}{2}}, 2^{\frac{81}{20}}, 5^{-\frac{3}{10}}, 2^{\frac{8}{15}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2, 16, 50^{\frac{3}{4}}, 0.1, 2, 5^{\frac{1}{2}}]$

36. Berechne ohne TR. Schreibe Dein Ergebnis als Potenz mit rationalem Exponenten bzw. als Zahl wenn möglich.

a) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^6 =$
b) $\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^4 =$
c) $\left(10^{\frac{3}{4}}\right)^2 =$
d) $\left(10^2\right)^{\frac{2}{3}} =$

$[625, 3^{-2}, 10^{\frac{3}{2}}, 10^{\frac{4}{3}}]$

37. Berechne ohne TR. Schreibe Dein Ergebnis als Potenz mit rationalem Exponenten bzw. als Zahl wenn möglich.

a) $5^{\frac{1}{6}} : 5^{\frac{1}{7}} =$
b) $\left(a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}}\right) : a =$
c) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{2} =$
d) $\left(\sqrt[8]{5^3} \cdot \sqrt[5]{5^6}\right) : \sqrt[40]{5} =$

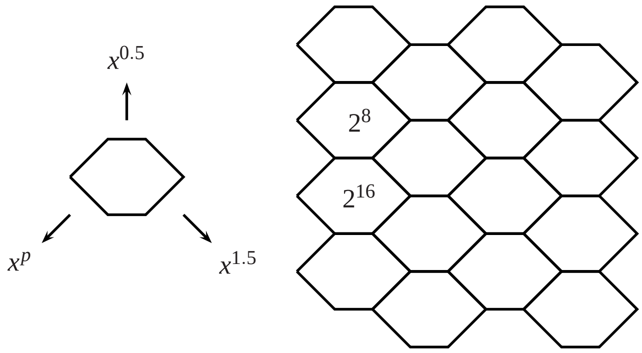
$[5^{\frac{1}{42}}, a^{-\frac{11}{12}}, 2^{\frac{2}{15}}, 5^{\frac{31}{20}}]$

38. Ermittle mit Hilfe der Potenzregeln und ohne TR die Lösungmenge der untenstehenden Gleichungen in **R**.

a) $9^x = 3$
b) $8^x = 4$
c) $1000^x = 0.1$
d) $8^{-0.25} = 2^x$

$[0.5, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -0.75]$

39. Fülle die Zellen der Wabe nach folgender Regel aus und berechne p. $[p = 4/3]$



40. Schreibe als Potenz mit rationalem Exponenten. Überprüfe Dein Ergebnis anschliessend mit der TR.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{2}} =$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} =$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} =$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$

$[2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{12}}, 2^{\frac{7}{8}}, 2^{-\frac{1}{6}}]$

41. Entscheide ohne TR, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe Deine Entscheidung !

a) $9^{1.5} \in \mathbf{N}$ [w] b) $5^{1.5} < 11$ [f]

c) $0.5^{0.5} > 0.5$ [w] d) $\pi^{100} < 9^{50}$ [f]

e) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2}$ [f] f) $27^{\frac{2}{3}} + 64^{\frac{2}{3}} = 125^{\frac{2}{3}}$ [w]

g) $16^{0.75} \in \mathbf{N}$ [w] h) $\left(2+\frac{2}{3}\right)^{0.5} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{0.5}$ [w]

i) $\left(2+\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ [w]

42. (Zusatz) Schreibe mit nur einem Wurzelzeichen.

a) $\sqrt[3]{x^3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x^2\sqrt{x\sqrt{x^5}}}$ b) $\left(\sqrt[6]{\frac{a^5c^5}{b^3}} : \sqrt[4]{\frac{a^2b}{c^3}}\right)\cdot\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a^2c^5}}$

5 Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Unbekannte im Exponenten vorkommt. Sie sind im Allgemeinen mit unseren Mitteln nicht lösbar. Wir betrachten in diesem Abschnitt Spezialfälle, die sich mit unseren Mitteln lösen lassen.

Ein Beispiel:

$$4^x - 20\cdot 2^x = -64$$

Übungen

43. Löse die folgenden Gleichungen in $\mathbf{R}$.

a) $4 \cdot 2^x + 32 = (2^x)^2$ b) $9^{2x} + 3 = 4 \cdot 9^x$ c) $3^x + 18 \cdot 3^{-x} = -9$

$[\mathbf{L} = \{3\}, \mathbf{L} = \{0, 0.5\}, \mathbf{L} = \{\}]$