2.2 Funktionen 1.Grades

(Thema aus dem Bereich Analysis)

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist eine Funktion 1.Grades ?

Unter Funktionen 1.Grades verstehen wir Funktionen, in deren Vorschrift nur ein x (kein $x^2, x^3, \sqrt{x}, \ldots$) vorkommt.

Beispiele

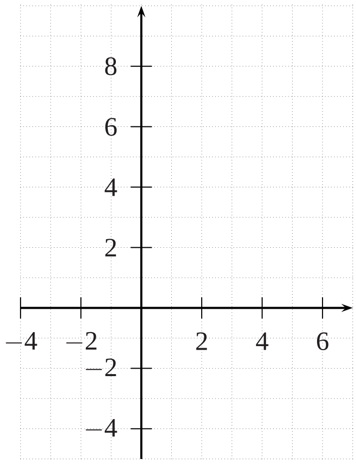
- $f(x) = 2x - 4$
- $f(x) = -6x - 2$
- $f(x) = 0.5x + 1$
- $f(x) = x + 24$

Die allgemeine Definition:

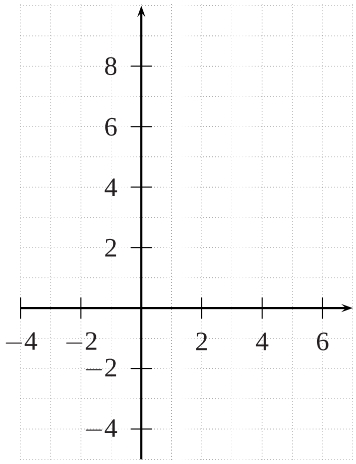
Definition 1
*Eine Funktion f heisst **Funktion 1.Grades**, wenn ihre Vorschrift folgende Form hat:*

Übung

1. Gib ein Beispiel einer Funktion an, die nicht den Grad 1 hat.
2. Die Punkte $A = (-6|?), B = (?|-6), C = (0|?)$ und $D = (?|0)$ liegen auf dem Graphen der Funktion $y = 3x + 2$. Berechne die fehlenden Koordinaten dieser Punkte.
   $[A = (-6|-16), B = (-8/3|-6), C = (0|2), D = (-2/3|0)]$
3. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen ins untenstehende Koordinatensystem
   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$
   b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x + 2$
   c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 1.5x - 3$
   d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -0.5x + 3$
   e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 3$


8
6
4
2
−4 −2 2 4 6
−2
−4

4. Fülle die Lücke aus mit steiler/flacher.
   a) Wenn m (die Zahl vor dem x) positiv ist, dann gilt: je grösser m, umso .... die Gerade.
   b) Wenn m (die Zahl vor dem x) negativ ist, dann gilt: je grösser m, umso .... die Gerade.
5. Welchen Einfluss hat die Zahl n (die Zahl ohne x) auf den Graphen ?
6. Prüfe folgende Aussage: Wenn sich n ändert, dann auch die Steigung der Geraden (A6 ist hilfreich).
7. Gegeben ist die Vorschrift $y = 2x + 1$. Berechne den Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse und mit der y-Achse. $[(-0.5|0), (0|1)]$



8. Fülle folgende Wertetabelle aus:

x	-2	-1	0	1	2	3
y=2x-1						

   Was fällt Dir auf ?
9. Ein Apfelverkäufer hat bei seinem Arbeitsbeginn 20 Fr. in der Kasse. Für 1 kg Äpfel verlangt er 3 Fr.. Kann die Zuordnung „Anz. kg verkaufter Äpfel → Kassenbestand“ mit einer Funktion ersten Grades beschrieben werden ? Begründe Deine Entscheidung !

2 Die Steigung einer Geraden

2.1 Die Definition der Steigung

Wir bezeichnen die Steigung einer Geraden mit s. Am naheliegendsten wäre es, einfach den Steigungswinkel zu nehmen. Mit dem lässt sich aber nicht einfach rechnen. Darum wählen wir einen anderen Weg, um die Steigung anzugeben:

- Wir wählen zwei Punkte auf dem Graphen.
- Wir zeichnen das Steigungsdreieck ein.
- Wir dividieren die Höhe mit der Länge, den Quotienten nennen wir **Steigung s**.

Beispiele

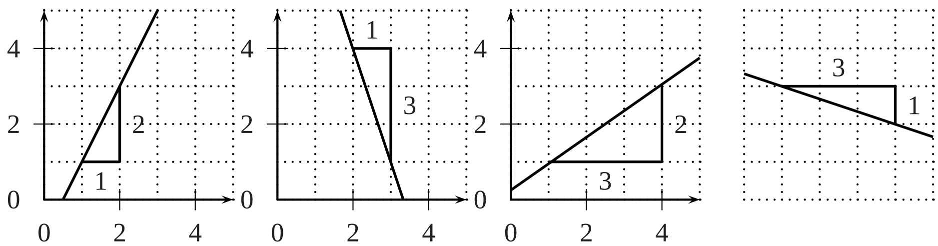


Abb.1 Abb.2 Abb.3 Abb.4

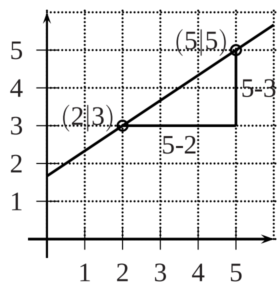
Die Steigungen werden nun folgendermassen bestimmt:

- Abb.1: $s = 2/1 = 2$.
- Abb.2: $s = -3/1 = -3$.
- Abb.3: $s = 2/3$.
- Abb.4: $s = -1/3$.

2.2 Die Berechnung der Steigung aus zwei gegebenen Punkten.

Gegeben sind die zwei Punkte $P_1 = (2|3)$ und $P_2 = (5|5)$. Welche Steigung hat die Gerade, die durch diese beiden Punkte geht ?

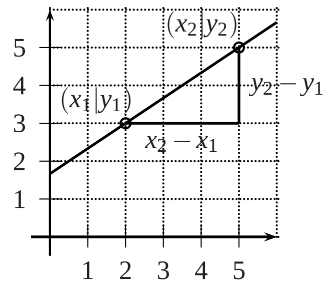
- Auf der nebenstehenden Abbildung sehen wir das Steigungsdreieck.
- Wir können die Höhe des Dreiecks berechnen: 5-3=2.
- Wir können die Länge des Dreiecks berechnen: 5-2=3.
- Die Steigung beträgt somit: $s = \frac{2}{3}$.



Nun der allgemeine Fall:

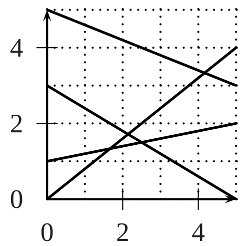
Gegeben sind die zwei Punkte $P_1 = (x_1|y_1)$ und $P_2 = (x_2|y_2)$, wobei gilt $x_2 > x_1$. Welche Steigung hat die Gerade, die durch diese beiden Punkte geht ?

- Auf der nebenstehenden Abbildung sehen wir das Steigungsdreieck.
- Wir können die Höhe des Dreiecks berechnen: $y_2 - y_1$.
- Wir können die Länge des Dreiecks berechnen: $x_2 - x_1$.
- Die Steigung beträgt somit: $\boxed{s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$



Übungen

10. Zeichne eine beliebige Gerade mit der Steigung 3 !
11. Bestimme jeweils die Steigung der Geraden. [$0.8; 0.2; -0.6; -0.4$]



12. Wir gehen noch einmal zurück zur Aufgabe 11.
    a) Berechne jeweils die Steiung der vier Geraden.
    b) Hat die Steigung einer Geraden etwas mit der dazugehörigen Funktionsvorschrift zu tun ?
13. Gegeben sind die drei Punkte $P_1 = (2|23.6)$, $P_2 = (10|50)$ und $P_3 = (50|182)$. Diese Punkte können wir nur schwer in ein Koordinatensystem eintragen ! Gibt es einen anderen Weg, um herauszufinden, ob alle drei Punkte auf einer Geraden liegen ?
14. Fülle die erste Lücke mit dem Wort links/rechts, die zweite Lücke mit dem Wort positiv/negativ aus.
    a) $A(3|2), B(6|8)$. A liegt .... von B, die Steigung ist ....
    b) $A(3|2), B(4|1)$. A liegt .... von B, die Steigung ist ....
    c) $A(-3|2), B(-4|1)$. A liegt .... von B, die Steigung ist ....
    d) $A(-3|-2), B(-4|1)$. A liegt .... von B, die Steigung ist ....
15. Eine Gerade geht durch die Punkte A und B. Berechne die Steigung s der Gerade, wenn
    a) $A(2|3), B(4|7)$ [$s = 2$]
    b) $A(1|4), B(2|1)$ [$s = -3$]
    c) $A(-1|-3), B(-3|-4)$ [$s = 0.5$]
16. Zeichne eine beliebige Gerade und gib die dazugehörige Funktionsvorschrift mit Hilfe der Zeichnung an.

17. Welchen Winkel schliesst der Graph der folgenden Funktionen mit der x-Achse ein ?

    a) $y = 3x + 1$ [71.57°]   b) $y = -2x - 4$ [-63.43°]

18. Welche beiden Winkel schliessen die Graphen der folgenden Funktionen ein ?

    a) $f(x) = x + 1, g(x) = 4x + 1$ [30.96°,149.04°]   b) $f(x) = x + 2, g(x) = 4x + 5$ [30.96°,149.04°]

    c) $f(x) = -x + 1, g(x) = 4x + 1$ [120.96°,59.04]

3 Wie können vorgegebene Punkte verwendet werden ?

Bei manchen Aufgaben sind Punkte gegeben, die auf der Geraden liegen. Wie können solche Punkte verwendet werden ? Wir betrachten dazu eine Aufgabe.

Eine Beispielsaufgabe

Die Gerade g geht durch die zwei Punkte $P_1 = (-3|-4)$ und $P_2 = (2|5)$. Berechne die Funktionsvorschrift f, die genau diesen Graphen als Funktionsgraphen hat ! [$f(x) = 1.8x + 1.4$]

Lösung

- Es handelt sich um eine Gerade, also können wir sicher schreiben:

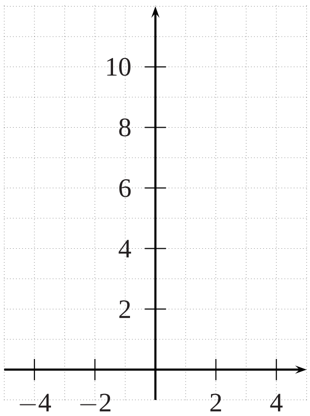
19. Die zu $y = \frac{2}{3}x + n$ gehörende Gerade geht durch den Punkt (-6|0). Berechne n. [$n = 4$]
20. Für die Funktion 1.Grades $y = mx + 4$ gilt: Der Punkt (5|9) liegt auf ihrem Graph. Berechne m. [$m = 1$]
21. Auf einer Gerade g liegen die Punkte (1|-1) und (3|3). Wie lautet die dazugehörige Funktionsvorschrift für die Gerade ? [$y = 2x - 3$]

4 Die Berechnung des Schnittpunktes von zwei Geraden

Eine Beispielsaufgabe

Gegeben sind zwei Funktionen $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = x + 2$ und $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = -x + 5$. Die Funktionsgraphen von f und g haben genau einen Schnittpunkt S. Finde ihn ! [(1.5|3.5)]

- Wir wollen zuerst die Situationen veranschaulichen und zeichnen die beiden Geraden ins untenstehende Koordinatensystem.



- Für den Schnittpunkt gilt: ....

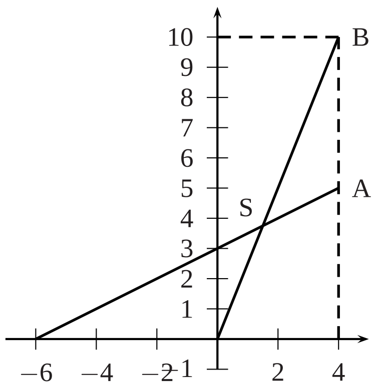
Übungen

22. Gegeben sind die zwei linearen Funktionen $y = 3x + 5$ und $y = 2x - 4$. Berechne den Schnittpunkt. [$(-9|-22)$]

23. Die Gerade g_1 geht durch die Punkte $P_1 = (1 \mid 1)$ und $P_2 = (3 \mid 5)$. Die Gerade g_2 geht durch die Punkte $P_1 = (0 \mid 5)$ und $P_2 = (4 \mid 1)$. Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden und prüfe nachher zeichnerisch nach. [$(2 \mid 3)$]

24. Berechne die Dreiecksfläche, die von der y-Achse und den Geraden g und h eingeschlossen wird, wenn die dazugehörigen Vorschriften $y = \frac{1}{3}x + 2$ und $y = -x + 8$ lauten (die Skalierung der x- und y-Achse ist gleich, $1\text{E} = 1\,\text{cm}$). [$13.5\,\text{cm}^2$]

25. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABS (die Skalierung der x- und y-Achse ist gleich, $1\text{E} = 1\,\text{cm}$). [$6.25\,\text{cm}^2$]



26. (Zusatz) Gegeben sind die zwei Funktionen 1.Grades $y = m_1 x + n_1$ und $y = m_2 x + n_2$. Leite eine Formel für den Schnittpunkt her ! $[(\frac{n_2-n_1}{m_1-m_2} | \frac{m_1 n_2 - n_1 m_2}{m_1-m_2})]$

5 Textaufgaben

Beispiel

Eine 80 cm hohe zylinderförmige Regentonne wird bei gleichmässigem Zulauf mit Wasser gefüllt. Nach 3 Minuten steht das Wasser 25 cm hoch, nach weiteren 2 Minuten steht es 33 cm hoch. Wie lange dauert es, bis die Tonne voll ist ? [16.75min]

Übungen

27. -17.8 Grad Celsius entsprechen 0 Grad Fahrenheit und 37.8 Grad Celsius entsprechen 100 Grad Fahrenheit. Wir ordnen x Grad Celsius y Grad Fahrenheit zu.

a) Diese Zuordnung können wir mit einer linearen Funktionsvorschrift beschreiben. Finde diese Vorschrift. [$y = 1.80x + 32.04$]

b) Wieviel Grad Fahrenheit entsprechen 100 Grad Celsius ? Wieviel Grad Celsius entsprechen 70 Grad Fahrenheit ? [$100°C \hat{=} 212.04°F, 70°F \hat{=} 21.09°C$]

c) Bei wieviel Grad Fahrenheit liegt der Gefrierpunkt von Wasser (0° Celsius)? [$32.04°F$]

d) (Zusatz) Ermittle eine zweite Funktionsvorschrift, die den Grad Fahrenheit die Grad Celsius zuordnet. [$y = 0.56x - 17.8$]

28. Eine Schraubenfeder in in unbelastetem Zustand 8cm, bei einer Belastung mit 5 N 11 cm lang. Die Zuordnung Kraft $x \mapsto$ Dehnung y ist dabei linear.

a) Berechne die Zuordnungsvorschrift. [$f(x) = 0.6x + 8$]

b) Berechne die Federlänge für 4N. [10.4 cm]

29. Bei einer Prüfung können maximal 21 Punkte geschrieben werden. Der Lehrer gibt für 20 Punkte die Note 6, für 0 Punkte die Note 1. Die Zuordnung „erzielte Punkte $\rightarrow$ Note“ soll dabei linear sein.

a) Mit welcher Funktionsvorschrift lässt sich diese Zurordnung beschreiben ?

b) Welche Note erhält der Schüler, wenn er 9 Punkte erzielt ?

c) Wieviele Punkte sind nötig, um die Note 4 zu erzielen ?

30. Die Bewegung eines Körpers mit konstanter Geschwindigkeit (der Zeit in Sekunden wir der Weg in Metern zugeordnet) lässt sich mit der Funktionsvorschrift $y = 5 + 3t$ beschreiben.

a) Welche Strecke hat der Körper zum Zeitpunkt $t = 4$ zurückgelegt ?

b) Nach welcher Zeit hat der Körper 30 m zurückgelegt ?

31. Ein Radfahrer fährt zur Zeit $t = 0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit von 18km/h los. Ein Mofafahrer fährt 10min später mit einer konstanten Geschwindigkeit von 24km/h los. Nach welcher Zeitdauer (aus der Sicht des Velofahrers) treffen sie sich ? [40 min]

32. (Zusatz) Gegeben sind die zwei Funktionen 1.Grades $f(x) = m_1x + n_1$ und $g(x) = m_2x + n_2$. Leite eine Formel für den Schnittwinkel her !

[$|\tan^{-1}(m_1) - \tan^{-1}(m_2)|$]