2.1 Einführung in die Funktionenlehre

(Thema aus dem Bereich Analysis)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in den Begriff

Der Begriff **Funktion** ist relativ komplex und umfangreich und wurde in der heutigen Form erst im 18.Jahrhundert eingeführt. Schauen wir zuerst die Definition des Begriffs an:

Definition 1 *Gegeben sind zwei Mengen, eine nennen wir Definitionsmenge* $\mathbf{D}$*, die andere Bildmenge* $\mathbf{B}$*. Eine Funktion* f *ist eine Zuordnung, die jedem Element der Menge* $\mathbf{D}$ *genau ein Element der Menge* $\mathbf{B}$ *zuordnet.*

Beispiel

Weitere Beispiele:

- Den Schülern der Kantonsschule Solothurn wird der Jahrgang zugeordnet.
- Den Klassen der Kanti Solothurn wird der/die Klassenlehrer/in zugeordnet.
- Einer natürlichen Zahl wird das Dreifache dieser Zahl zugeordnet.
- Einer ganzen Zahl wird die Hälfte dieser Zahl zugeordnet.

Übungen

1. Stelle folgende Funktionen mit Mengendiagrammen und Zuordnungspfeilen dar.

   a) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, y = x + 2$ b) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, y = -x$

2. Wie muss die Vorschrift gewählt werden, damit die untenstehende Zuordnung entsteht ?

   a) Seitenlänge eines Quadrats (in cm) $\to$ Flächeninhalt des Quadrats (in cm^2)
   b) Kantenlänge eines Würfels (in cm) $\to$ Volumen des Würfels (in cm^3)
   c) Durchmesser eines Kreises (in cm) $\to$ Umfang des Kreises (in cm)
   d) Eine Zahl in $\mathbf{R}$ $\to$ das Fünffache der Quadratwurzel dieser Zahl

e) x: eine Zahl, $f(x)$: der Kehrwert dieser Zahl (z.B. von 5 ist der Kehrwert 1/5)

$[y = x^2, y = x^3, y = \pi d, y = 5\sqrt{x}, y = \frac{1}{x}]$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   a) Berechne $f(2), f(\frac{1}{3})$ und $f(-0.5)$
   b) Berechne x, wenn $f(x) = 0.25$ und $f(x) = -\dfrac{7}{4}$
   c) Argument: 10; Funktionswert ?
   d) Funktionswert: 0.004; Argument ?
   e) grösstmögliche Definitionsmenge ?

$[0.5, 3, -2; 4, -4/7; 0.1; 250, \mathbf{R}\backslash\{0\}]$

4. Fülle folgende Tabellen aus.

a)

x	2	3	4	5
$y = \ldots$	5	10	17	...

b)

x	4	9	16	25
$y = \ldots$	1	...	3	4

Lernziel

- Ich kenne die Begriffe Definitionsmenge, Bildmenge, Argument und Funktionswert.

2 Der Funktionsgraph und die Wertetabelle

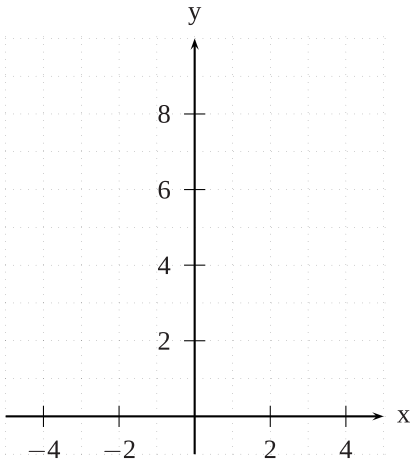
In diesem Abschnitt lernen wir den Begriff Funktionsgraph kennen. Wie das Wort sagt, hat das Ganze mit etwas mit Zeichnen zu tun. Wie kommen wir aber von einem symbolbehafteten Gebilde wie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}, f(x) = x^2$ zu einer Zeichnung ? Dies geschieht in zwei Schritten.

- Wir erstelle eine Wertetabelle, um die Punkte auszurechnen die eingezeichnet werden sollen.
- Dann zeichnen wir ein Koordinatensystem mit x- und y-Achse.
- Die Punkte werden ins Koordinatensystem eingetragen.

Zuerst erstellen wir eine **Wertetabelle** zu der gegebenen Funktion:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = x^2$	9	4						...
Punkt	(-3|9)	(-2|4)						...

Die erhaltenen Punkte werden eingetragen ins Koordinatensystem:



Zusätzliche Frage: Was hätten wir ändern müssen, um als Funktionsgraph eine durchgezogene Linie und nicht nur vereinzelte Punkte zu erhalten ?

Antwort:

Der letzte Begriff dieses Abschnitts: Die Menge aller möglichen Funktionswerte („Alle Zahlen, die wir erhalten können “) einer Funktion f nennen wir **Wertemenge W**.

Ein Beispiel:

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = 3x$$

- Die Wertetabelle:

x	1	2	3	4	...
$y = 3x$	3	6	9	12	...

- Wir erhalten die 3-er Reihe. Damit: **W** = {3,6,9,...}

Übungen

5. Wir haben eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = x + 3$.
   a) Zeichne den Graphen dieser Funktion im Bereich $x = -2$ bis $x = 5$.
   b) Überlege rechnerisch und kontrolliere mit (a): Liegt der Punkt $P = (4|6)$ unterhalb oder oberhalb des Graphen ?

6. Zeichne den Graphen der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = x^2 - 1$.

7. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen ins gleiche Koordinatensystem:

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = 2x + 1$ b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = 2x - 3$

8. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem. Kannst Du Dir vorstellen, bei welchen Zuordnungen solche Graphen entstehen können ?

   a) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, y = 2x$ b) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, y = \frac{100}{x}$

9. Worin unterscheiden sich die Graphen der Funktionen $f_1 : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, y = x^2 + 1$ und $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = x^2 + 1$?

10. Bestimme die Wertemenge $\mathbf{W}$ der folgenden Funktionen:

    a) $f(x) = -x, D = \mathbf{R}_0^+$ (positive reelle Zahlen mit der Null)
    b) $f(x) = -x, D = \mathbf{R}$
    c) $f(x) = x + 2, D = \mathbf{R}_0^+$ (positive reelle Zahlen mit der Null)

    $[\mathbf{R}_0^-, \mathbf{R}, [2, \infty)]$

11. Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 5$

    a) Berechne $f(0), f(100), f(-50)$!
    b) Für welche x gilt: $f(x) = 1, f(x) = 100$?

    $[f(0) = 5, f(100) = 205, f(-50) = -95; -2, 47.5]$

12. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$

    a) Berechne $f(16), f(900), f(\frac{9}{25})$ und $f(-9)$
    b) Berechne x: $f(x) = 9, f(x) = 4, f(x) = -3$
    c) Argument: 9; Funktionswert ?
    d) Funktionswert 4: Argument ?
    e) Grösstmögliche Definitionsmenge in $\mathbf{R}$?
    f) Zeichne den Graphen der Funktion im Bereich $0 \leq x \leq 9$.
    g) Wertemenge bei der grösstmöglichen Definitionsmenge ?

    $[4, 30, 0.6, n.d.; 3, 2, k.W.; 3; 16; \mathbf{D} = \mathbf{R}_0^+; \mathbf{W} = \mathbf{R}_0^+]$

13. Zeichne den Graphen der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x - 2|$ und ermittle die Wertemenge $\mathbf{W}$. $[\mathbf{W} = \mathbf{R}_0^+]$

14. Stefan eicht einen Glaszylinder. Wenn er einen Liter Wasser hineingiesst, erreicht die Wassersäule eine Höhe von 40cm. Wir ordnen der Wassermenge (in cm^3) also jeweils die Höhe der Wassersäule (in cm) zu.

    a) Gib die Funktionsvorschrift an !
    b) Beantworte mit der Funktionsvorschrift: In welcher Höhe ist die Markierung für $50\,\text{cm}^3$ anzubringen ?

c) Wie müssten wir die Funktionsvorschrift wählen, wenn der Wassermenge in Litern die Wasserhöhe in cm zugeordnet wird ?

d) Wie muss die Vorschrift gewählt werden, wenn der Wasserhöhe in cm die Anzahl Liter Wasser zugeordnet werden ?

$[y = 0.04x; 2\,\text{cm}; y = 40x; y = 0.025x]$

15. Wir betrachten eine Zuordnung von Euros zu Franken. Im Moment gilt ungefähr: $1\,\text{EUR} = 1.65\,\text{CHF}$

a) Gib die Funktionsvorschrift an.

b) Wieviele Schweizer Franken erhalten wir für 50 Euros ?

c) Berechne mit Hilfe der Vorschrift aus a): Wieviele Euros erhalten wir mit 50 CHF ?

d) Gib die Vorschrift an, die den Schweizer Franken die Euros zuordnet.

$[y = 1.65x; 82.5\,\text{CHF}, \approx 30.3\,\text{EUR}, y \approx 0.61x]$

16. Aus 100 Schülern werden Gruppen gebildet. x steht dabei für die Grösse der Gruppe. Der Gruppengrösse wird jeweils die Anzahl Gruppen zugeordnet.

a) Mit welcher Funktionsvorschrift kann die Zuordnung beschrieben werden ? Bestimme k (s. Definition).

b) Berechne mit Hilfe der Funktionsvorschrift die Anzahl Gruppen bei einer Gruppengrösse von 25.

$[y = \frac{100}{x}, 4]$

Lernziele

- Ich weiss, was ein Funktionsgraph ist und wie ich ihn für eine gegebenen Funktion zeichnen kann.
- Ich kann zu einer gegebenen Funktion eine Wertetabelle erstellen.
- Ich kenne Methoden, um die Wertemenge einer Funktione zu bestimmen.

3 Der Funktionsbegriff wird noch näher angeschaut

In der Definition der Funktion sind drei Details versteckt, die wir uns hier näher anschauen wollen.

- Jedem Element aus der Definitionsmenge soll genau ein Element zugeordnet werden. In der folgenden Situation liegt also keine Funktion vor:

- Jedem Element aus der Definitionsmenge soll genau ein Element zugeordnet werdem. In der folgenden Situation liegt also keine Funktion vor:

- Jedem Element aus der Definitionsmenge soll genau ein Element aus der Bildmenge zugeordnet werden. In der folgenden Situation liegt also keine Funktion vor:

Die oberen drei Punkte sind **Abmachungen**, die sich für den späteren Gebrauch als zweckmässig erweisen.

Übungen

17. Gegeben ist die Menge A = {die Menge aller Schüler der Klasse 2cW} und die Menge B = {die Menge aller Sportarten}. Die Funktion f ordnet nun jedem Schüler seine Sportarten zu (Wir gehen davon aus, dass mindestens ein Schüler mehrere Sportarten betreibt). Handelt es sich bei f um eine korrekt definierte Funktion ? Begründe.

18. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = \frac{x}{2}$. Ist diese Funktion korrekt definiert ? Begründe Deine Antwort.

19. **B** = Bildmenge,**W** = Wertemenge. Überprüfe die folgende Aussagen:

    a) $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{B}$

    b) $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{W}$

4 Die Umkehrfunktion

4.1 Was ist eine Umkehrfunktion ?

Bis jetzt haben wir ein Element aus der Ausgangsmenge genommen, die Funktion darauf angewendet und ein neues Element aus der Bildmenge erhalten. Nun machen wir das Ganze umgekehrt. Wir nehmen ein Element aus der Bildmenge und wollen ihm das Element aus der Ausgangsmenge wieder zuordnen. So entsteht wieder eine Funktion, die sogenannte Umkehrfunktion $\overline{f}$.

4.2 Wann existiert eine Umkehrfunktion ?

Als erstes müssen wir uns die Frage stellen, ob die Umkehrfunktion überhaupt existiert. Warum wir uns diese Frage überhaupt stellen müssen, sehen wir an den folgenden Beispielen:

- $f : \{\text{Klasse 2cW}\} \to \{\text{Jahrgänge der Kl. 2cW}\}$, $f(x)$ = Jahrgang von x.

Reto	1992
Silvan	1992
Micha	1992
Alexandra	1991
....	....

- $f : \{\text{Klasse 2cW}\} \to \{\text{Tel.-Nu. der Kl. 2cW}\}$, $f(x)$ = Tel.-Nu. von x.

Reto	032 622 61 43
Silvan	032 661 19 23
Micha	032 623 03 35
Alexandra	032 641 02 35
....	....

- $f : \{\text{Klasse 2cW}\} \to \{\text{Tel.-Nu. der Schweiz}\}$, $f(x)$ = Tel.-Nu. von x.

Reto	032 622 61 43
Silvan	032 661 19 23
Micha	032 623 03 35
Alexandra	032 641 02 35
	032 620 43 43
....	....

- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 2x$.

x		1		2		3		4	
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}_g$, $f(x) = 2x$.

1	2	3	4	...
2	4	6	8	...

Zusammenfassend können wir sagen

Satz 1 *Gegeben ist eine Funktion $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ mit der Vorschrift $f(x)$. Die Umkehrfunktion $\overline{f}$ existiert genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

4.3 Wie lautet die Vorschrift der Umkehrfunktion ?

Bis jetzt haben wir überlegt, ob es eine Umkehrfunktion gibt. Wir fragen uns nun, wie die Vorschrift gegebenenfalls aussieht.

- f : {Klasse 2cW} $\to$ {Tel.-Nu. der Kl. 2cW}, $f(x)$ = Tel.-Nu. von x.
  $\Rightarrow \overline{f}(y)$ = ...
- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}_G$, $f(x) = 2x$
  $\Rightarrow \overline{f}(y)$ = ...
- Gegeben ist die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 2$. Wir können die Umkehrfunktion auf zwei Arten berechnen:
  - Von x nach y kommen wir, indem wir mit 3 multiplizieren und 2 addieren. Von y nach x kommen wir, indem wir 2 subtrahieren und durch 3 dividieren. Wir erhalten also:

– Wir setzen $f(x) = y$ und erhalten: $y = 3x + 2$. Wir lösen nach x auf:

Übungen

20. Gegeben ist $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$. Finde die Umkehrfunktion $\overline{f}(y)$! [$\overline{f}(y) = y/3$]
21. Wir haben $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 5$. Finde die Umkehrfunktion $\overline{f}(y)$! [$\overline{f}(y) = y - 5$]
22. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.
    a) Gibt es für f eine Umkehrfunktion ? Begründe !
    b) Wie muss man die Definitionsmenge und die Bildmenge verändern, so dass eine Umkehrfunktion existiert ?
23. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$.
    a) Gibt es für f eine Umkehrfunktion ? Begründe !
    b) Wie lautet die Umkehrfunktion von f ?

Lernziele

- Ich kann überprüfen, ob eine gegebene Funktion umkehrbar ist.
- Ich kann Definitions- und Bildmenge einer Funktion so verändern, dass sie umkehrbar wird.
- Ich kann die Vorschrift der Umkehrfunktion ermitteln.