1.9 Ungleichungen
(Thema aus dem Gebiet Algebra)

Inhaltsverzeichnis

1 Ungleichungen

Ein paar Beispiele von Ungleichungen:

Definition 1 *Werden zwei Terme T_1 und T_2 mit einem der vier Ungleichheitszeichen ($<, >, \leq$ oder $\geq$) verbunden, so entsteht eine Ungleichung ($T_1 < T_2, T_1 \leq T_2, T_1 > T_2$ oder $T_1 \geq T_2$).*

2 Intervalle

Welche Lösungsmenge hat die Ungleichung $2x < 5$ in den reellen Zahlen ?

$$2x < 5 \Rightarrow x < 2.5$$

Eine Ungleichung hat normalerweise unendlich viele Lösungen (in diesem Falle alle reellen Zahlen, die kleiner als 2.5 sind). Wie aber sollen wir solche Lösungsmengen in der Form $\mathbf{L} = ...$ notieren ? Das bisherige Vorgehen mit den geschweiften Klammern ($\mathbf{L} = \{...\}$) funktioniert leider nicht mehr (reelle Zahlen können nicht aufgezählt werden). Wir müssen uns also etwas neues einfallen lassen.

„Lückenlose“ Teilmengen der reellen Zahlen nennen wir **Intervalle**. Für sie gibt es eigene Symbole: [,],(,). Beispiele von solchen Teilmengen sind:

- alle reellen Zahlen zwischen 2 und 5 (mit den Grenzen).
- alle reellen Zahlen zwischen -1 und 4 (ohne Grenzen).
- alle reellen Zahlen grösser als 3 (mit der 3).

Folgende Teilmengen sind **keine** Intervalle:

- alle reellen Zahlen zwischen 2 und 5 (mit den Grenzen), aber ohne 3 und 4.
- alle reellen Zahlen zwischen -1 und 4 (ohne Grenzen), aber ohne 0.

Intervalle eignen sich also vorzüglich, um Lösungmengen von Ungleichungen anzugeben. Es gibt **offene**, **halboffene** und **abgeschlossene** Intervalle. Untenstehende Tabelle soll einen Überblick bieten. Es gilt immer: **a < b**.

Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Art des Intervalls	Zeichnung des Intervalls
Die Menge aller Zahlen zwischen a und b einschliesslich der Grenzen	$[a,b]$	abgeschlossen	
Die Menge aller Zahlen zwischen a und b ohne Grenzen	(a,b)	offen	
Die Menge aller Zahlen zwischen a und b **mit** a, aber **ohne** b	$[a,b)$	halboffen	
Die Menge aller Zahlen zwischen a und b **ohne** a, aber **mit** b	$(a,b]$	halboffen	

Die Intervalle müssen nicht begrenzt sein, d.h. auf der linken Seite kann $-\infty$ oder auf der rechten Seite kann ∞ stehen. Es gibt dann noch folgende Fälle:

Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Art des Intervalls	Zeichnung des Intervalls
Die Menge aller Zahlen $\leq a$	$(-\infty,a]$	halboffen	
Die Menge aller Zahlen $< a$	$(-\infty,a)$	offen	
Die Menge aller Zahlen $\geq a$	$[a,\infty)$	halboffen	
Die Menge aller Zahlen $> a$	(a,∞)	offen	

Übungen

1. Stelle die folgenden Intervalle graphisch dar:

   a) $(4,5)$ b) $[2,5]$
   c) $(0,6]$ d) $[7,9)$

2. Bestimme folgende Schnitt- bzw. Vereinigungsmengen.

   a) $[-1,2]\cap(0,4)$ b) $[-1,2]\cup(0,4)$ c) $[-3,0.5]\cup[-0.5,3)$
   d) $[-3,-0.5]\cap[-0.5,3)$ e) $\mathbf{N}\cap[0,6)$ f) $[-5,0)\cup[-1,4]$

3 Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Unter einer Äquivalenzumformung einer Ungleichung verstehen wir eine Umformung, bei der die Lösungsmenge der Ungleichung nicht verändert wird.

Bei den folgenden Äquivalenzumformungen wird das Ungleichheitszeichen **nicht gedreht**:

- Termumformungen (Ausmultiplizieren, Zusammenfassen, Vereinfachen).

- Auf beiden Seiten dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren.

- Beide Seiten mit derselben **positiven** Zahl (>0) **multiplizieren** oder **divieren**.

Bei der folgenden Äquivalenzumformung wird das Ungleichheitszeichen **gedreht**:

- Beide Seiten mit derselben **negativen** Zahl (<0) multiplizieren oder mit derselben **negativen** Zahl dividieren.

Merke: Wird eine Ungleichung mit einer **negativen Zahl multipliziert oder dividiert**, dann muss das Ungleichheitszeichen **gedreht** werden.

Begründung:

Beispiel: $2x+5 < 7x-3$

Übungen

3. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen in $\mathbf{R}$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

   a) $x+2.5 \leq -4$ $[\mathbf{L} = (-\infty; -6.5]]$

   b) $4+x \geq -2$ $[\mathbf{L} = [-6; \infty)]$

   c) $2x \leq -3.5x-11$ $[\mathbf{L} = (-\infty; -2]]$

   d) $x > 2x+1$ $[\mathbf{L} = (-\infty; -1)]$

   e) $9-x > -0.5x+1$ $[\mathbf{L} = (-\infty; 16)]$

   f) $-\frac{3}{4}x < \frac{1}{2}x$ $[\mathbf{L} = (0; \infty)]$

   g) $\frac{5-2x}{3} < 0$ $[\mathbf{L} = (2.5; \infty)]$

   h) $(x+1)(x-3) > (x-4)^2$ $[\mathbf{L} = (19/6; \infty)]$

   i) $x^2-7-(x-2)^2 \leq x-1$ $[\mathbf{L} = (-\infty; 10/3]]$

4 Doppelungleichungen

Beispiele von Doppelungleichungen

Von einer Doppelungleichung sprechen wir, wenn zwei Ungleichheitszeichen vorkommen.

4.1 Verfahren, um Doppelungleichungen zu lösen

1. Nimm die beiden Ungleichungen auseinander
2. Berechne die Lösungsmengen der beiden Ungleichungen
3. Die Schnittmenge der beiden Lösungsmengen ergibt dann die gesamte Lösungsmenge

Beispiel: $2x-1 < 3x-1 \leq 1-x$

1. Nimm die Ungleichungen auseinander:

2. Berechne die Lösungsmengen der beiden Ungleichungen:

3. Die Schnittmenge der beiden Lösungsmengen ergibt dann die gesamte Lösungsmenge:

Übungen

4. Löse die folgenden Ungleichungen in $\mathbf{R}$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

   a) $0 < 2x - 3 < 5$ $[\mathbf{L} = (1.5;4)]$ b) $-8 < 5 - 0.5x \leq 0$ $[\mathbf{L} = [10;26)]$

   c) $-1 \leq 2(3x-1) + x \leq 5$ $[\mathbf{L} = [1/7;1]]$

5 Spezielle nichtlineare Ungleichungen

5.1 spezielle Ungleichungen 2.Grades

Wir betrachten in diesem Abschnitt spezielle Ungleichungen 2.Grades, nämlich solche, die sich faktorisieren lassen (wie schon bei den Gleichungen 2.Grades).

Beispiele von Ungleichungen 2.Grades, die sich faktorisieren lassen

Solche Ungleichungen können wir nicht mit elementaren Zeilenumformungen lösen, folgende Sätze helfen uns weiter:

Satz 1 *$a \in \boldsymbol{R}$ und $b \in \boldsymbol{R}$. Es gilt:*

$$a \cdot b \leq 0 \Rightarrow$$

Satz 2 *$a \in \boldsymbol{R}$ und $b \in \boldsymbol{R}$. Es gilt:*

$$a \cdot b \geq 0 \Rightarrow$$

Wir lösen nun zwei Beispiele mit Hilfe dieser Sätze.

Beispiel 1: $(x-3)(x+4) < 0$

Beispiel 2: $(2x-5)(3x+3) \geq 0$

Übungen

5. Finde die Lösungsmenge in $\mathbf{R}$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

   a) $(2x+4)(x-1) > 0$ $[\mathbf{L} = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)]$
   b) $(x+1)(x-1) \geq 0$ $[\mathbf{L} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)]$
   c) $x(x+1) \leq 0$ $[\mathbf{L} = [-1, 0]]$
   d) $x^2 + 7x + 12 < 0$ $[\mathbf{L} = (-4, -3)]$
   e) $x^2 - x > 2$ $[\mathbf{L} = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)]$

6. Bei dieser Aufgabe begegnen wir faktorisierten Ungleichungen, die sogar den Grad 3 haben. Finde die Lösungsmenge in $\mathbf{R}$ und gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

   a) $(x+2)(x-1)(x+3) < 0$ $[\mathbf{L} = (-\infty, -3) \cup (-2, 1)]$
   b) $(2x+1)(3x-3)(x+4) \geq 0$ $[\mathbf{L} = [-4, -0.5] \cup [1, \infty)]$

7. (Zusatz) Finde die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung in $\mathbf{R}$ und gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

   a) $(x+2)(x-1)(x+3)(x+4) < 0$ $[\mathbf{L} = (-4, -3) \cup (-2, 1)]$

6 Bruchungleichungen I

Unter einer Bruchungleichung verstehen wir eine Ungleichung, bei der die Unbekannte im Nenner (und häufig, aber nicht notwendigerweise auch im Zähler) eines Bruches vorkommt. Wir versuchen die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung zu finden.

Aufgabe:

$$\frac{x-1}{x+2} < 0$$

Frage: Welchen Zahlen müssen für x eingesetzt werden, damit die Ungleichung erfüllt ist (d.h. auf der linken Seite steht etwas kleineres als auf der rechten Seite) ?

Überlegung: Wir haben es mit einem Bruch zu tun. Bei den Bruchgleichungen haben wir gelernt, dass wir die Gleichung mit dem Nenner des Bruches multiplizieren, um ihn loszuwerden. Geht das auch bei den Bruchungleichungen ? Dürfen wir mit $x+2$ multiplizieren ?

Antwort:

Lösungsweg:

In Worten: Auf der linken Seite muss ein Bruch stehen, auf der rechten Seite eine 0. Die Ungleichung muss auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{a}{b} < 0$$

Es gilt folgender Satz:

Satz 3 *Es sei $a \in \boldsymbol{R}$ und $b \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt:*

- $\frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow$
- $\frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir unsere Ungleichung lösen:

Beachte: Wir lösen die Ungleichung also nicht, indem wir Äquivalenzumformungen anwenden.

Übungen

8. Bestimme die Lösungsmenge in $\mathbf{R}$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

a) $\dfrac{x}{x+1} > 0$ $[\mathbf{L} = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)]$

b) $\dfrac{x+7}{x+1} \leq 0$ $[\mathbf{L} = [-7, -1)]$

c) $\dfrac{x-4}{x-2} \geq 0$ $[\mathbf{L} = (-\infty, 2) \cup [4, \infty)]$

d) $-\dfrac{x+1}{x} < 0$ $[\mathbf{L} = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)]$

7 Bruchungleichungen II

In diesem Abschnitt geht es noch einmal um Bruchungleichungen, diesmal etwas schwieriger:

Aufgabe:

$$\frac{x-1}{x+2} < -1$$

Frage: Für welche Werte von x ist die Ungleichung erfüllt (d.h. die linke Seite gibt etwas kleineres als -1) ?

Überlegung:

Lösung:

9. Finde die Lösungsmenge in $\mathbf{R}$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

a) $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ [$\mathbf{L} = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$]

b) $\frac{6}{x-5} > \frac{1}{2}$ [$\mathbf{L} = (5; 17)$]

c) $\frac{x+5}{x-3} < 2$ [$\mathbf{L} = (-\infty, 3) \cup (11, \infty)$]

d) $-\frac{x+1}{x-1} \geq 1\frac{1}{3}$ [$\mathbf{L} = [1/7; 1)$]

e) $\frac{1}{(x-2)(x-6)} < 0$ [$\mathbf{L} = (2, 6)$]

f) $\frac{1}{(x-3)(x+5)} > 0$ [$\mathbf{L} = (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$]

g) $\frac{-3}{x^2+5x} < 0$ [$\mathbf{L} = (-\infty, -5) \cup (0, \infty)$]

h) $\frac{4}{x^2-8x+15} > 0$ [$\mathbf{L} = (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$]

10. (Zusatz) Finde die Lösungsmenge in $\mathbf{R}$ und gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

a) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-12} < 0$ [$\mathbf{L} = (-4, -2) \cup (-1, 3)$]