# 1.7 Gleichungen II

(Thema aus dem Bereich Algebra)

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Lösen von Bruchgleichungen - Methode I

Im ersten Abschnitt geht es um Bruchgleichungen. Das sind Gleichungen, wo die Unbekannte im Nenner eines Bruches (oder mehrerer Brüche) vorkommt. Wir schauen uns ein Beispiel an:

**Aufgabe:**

$$\frac{5x+2}{x-2}-\frac{x-6}{x+6}=4$$

! Auf dem Weg zur Lösung multiplizieren wir mit einem Term (z.B. $\cdot(x-2)$ ). Dies ist aber nicht immer eine Äquivalenzumformung, es kann sein, dass wir „Lösungen“ erhalten, die gar keine sind (Scheinlösungen). Deshalb müssen wir für die erhaltenen Lösungen immer überprüfen, ob sie auch in der Definitionsmenge sind.

1. Bestimme die Lösungen der Gleichungen in $\mathbf{Q}$, indem Du zuerst die Definitionsmenge ermittelst und dann nach $x$ auflöst. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \{\ldots\}$ an.

   a) $\dfrac{3+x}{x-2} = \dfrac{2x+1}{2x-4}$ $[\mathbf{L} = \{\}]$

   b) $\dfrac{1}{x} + 2 = \dfrac{9}{x}$ $[\mathbf{L} = \{4\}]$

   c) $\dfrac{3(x+2)}{x+8} = \dfrac{2(x+3)}{x+8}$ $[\mathbf{L} = \{0\}]$

   d) $\dfrac{x-7}{x-13} = \dfrac{x-1}{x+2}$ $[\mathbf{L} = \{3\}]$

   e) $\dfrac{x-6}{x} = \dfrac{x}{x+10}$ $[\mathbf{L} = \{15\}]$

2. Bei welchen der untenstehenden Bruchgleichungen ist $x = -2$ eine Lösung ?

   a) $\dfrac{1}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{1}{(x+2)(x+4)}$ [nein]

   b) $\dfrac{x-4}{14+x} = \dfrac{x-2}{x+10}$ [ja]

3. Bei der untenstehenden Bruchgleichung geraten wir in eine Sackgasse, wenn wir mit der bisher gelernten Methode verfahren. Gibt es einen anderen Weg, der es uns ermöglicht, Gleichung zu lösen ? Probiere Deine Idee aus ! Die Lösung der Gleichung lautet $x = -5/3$

$$\begin{aligned}
\frac{2x+19}{x+2} &= \frac{47}{3x+6} \mid \cdot (x+2) \\
2x+19 &= \frac{47(x+2)}{3x+6} \mid \cdot (3x+6) \\
(2x+19)(3x+6) &= 47(x+2) \\
6x^2+12x+57x+54 &= 47x+94 \\
6x^2+69x+54 &= 47x+94 \\
6x^2+22x &= 40
\end{aligned}$$

# 2 Lösen von Bruchgleichungen - Methode II

Bei der letzten Übungsaufgabe haben wir gesehen, dass die Multiplikationsmethode in eine Sackgasse führen kann. Aus diesem Grunde lernen wir eine 2.Methode zum Lösen von Bruchgleichungen kennen. Sie wird am einfachsten an einem Beispiel erklärt:

**Beispiel**

$$\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+8}{x^2-4}$$

4. Bestimme die Lösung der folgenden Gleichungen in **Q**.

a) $\frac{x-7}{6x+6} = \frac{x+7}{8x+8}$ $[\mathbf{L} = \{49\}]$

b) $\frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x}{x^2-1}$ $[\mathbf{L} = \{-2\}]$

c) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x-1}{2x+2} = \frac{4x-1}{4x+4}$ $[\mathbf{L} = \{-0.25\}]$

d) $\frac{z-3}{z-2} + \frac{z}{5z-10} = \frac{4}{5}$ $[\mathbf{L} = \{3.5\}]$

e) $\frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-5}{x^2-5x+6}$ $[\mathbf{L} = \{0\}]$

f) $\frac{5}{2t^2+3t} + \frac{6}{2t+3} - \frac{7}{t} = 0$ $[\mathbf{L} = \{-2\}]$

5. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen in **Q**.

a) $\frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{2}{x}} - \frac{1-\frac{3}{x}}{3+\frac{3}{x}} = \frac{1-\frac{4}{x}}{4+\frac{4}{x}}$ $[\mathbf{L} = \{12\}]$

b) $\frac{\frac{1}{4}x+1}{1-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{2-x} = \frac{1}{4}$ $[\mathbf{L} = \{0\}]$

c) $\frac{1}{1+\frac{1}{w}} = \frac{1+\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}}$ $[\mathbf{L} = \{-1/3\}]$

6. Löse die folgenden Bruchgleichungen jeweils nach allen Variablen auf.

a) $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

c) $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$

d) $C = 4\pi\varepsilon \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)}$

$[b = -\frac{fg}{f-g}, f = \frac{bg}{b+g}, g = \frac{bf}{f-g}, R = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}, R_1 = \frac{RR_2R_3}{R_2R_3-RR_3-RR_2}, R_2 = \frac{RR_1R_3}{R_1R_3-RR_3-RR_1}, R_3 = \frac{RR_1R_2}{R_1R_2-RR_2-RR_1},]$

$[f = \frac{r_1r_2}{nr_2+nr_1-r_2-r_1}, n = \frac{r_1r_2+fr_2+fr_1}{fr_2+fr_1}, r_1 = \frac{fnr_2-fr_2}{r_2-fn+f}, r_2 = \frac{fnr_1-fr_1}{r_1-fn+f}, r_a = \frac{Cr_i}{C-4\pi\varepsilon r_i}, r_i = \frac{Cr_a}{C+4\pi\varepsilon r_a}]$

7. (Zusatzaufgabe) Löse die folgende Gleichung nach $u$ auf. $[u = \frac{c^2u'+c^2v}{c^2+u'v}]$

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

# 3 faktorisierte Gleichungen

Gleichungen mit Faktoren, deren Produkt 0 ist, lassen sich besonders einfach lösen. Zur Repetition der Begriffe Faktoren und Produkt:

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$a \cdot b = 0$$

Überlegen wir uns die Resultate der folgenden Rechnungen:

- $3 \cdot 0 =$
- $0 \cdot 5 =$
- $3 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 7 =$

Es gilt folgender Satz (der Pfeil $\Rightarrow$ bedeutet: „daraus folgt “):

**Satz 1** *Wenn beim Produkt $a \cdot b$ mindestens ein Faktor 0 ist, dann hat das Produkt den Wert 0, d.h.*

Es gilt auch die Umkehrung des Satzes.

**Satz 2** *Wenn das Produkt $a \cdot b$ den Wert 0 hat, dann ist mindestens ein Faktor 0, d.h.*

**Beispiel**

- $(x-1)(x-3) = 0$

  Lösung der Gleichung:

  - Die Faktoren sind hier $(x-1)$ und $(x-3)$

**Übungen**

8. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen in $\mathbf{Q}$.

   a) $7777(2x-37)=0$ [$\mathbf{L}=\{18.5\}$]
   b) $1234(444-10x)=0$ [$\mathbf{L}=\{44.4\}$]
   c) $x(12x+96)=0$ [$\mathbf{L}=\{-8,0\}$]
   d) $35x(7x+91)=0$ [$\mathbf{L}=\{-13,0\}$]

9. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen in $\mathbf{Q}$.

   a) $(x-6)(2x+9)=0$ [$\mathbf{L}=\{-4.5,6\}$]
   b) $(5x-2)(4x+3)=0$ [$\mathbf{L}=\{0.4,0.75\}$]
   c) $(120-8x)(12+8x)=0$ [$\mathbf{L}=\{-1.5,15\}$]
   d) $(x+2.5)(5x-2)=0$ [$\mathbf{L}=\{-2.5,0.4\}$]
   e) $x(x-9)(2x+13)(3x-15)=0$ [$\mathbf{L}=\{-6.5,0,5,9\}$]
   f) $(5x+7)(6x-90)(9x+60)=0$ [$\mathbf{L}=\{-6.\overline{6},-1.4,15\}$]
   g) $(4x+3+7x)(15-7x-1)=0$ [$\mathbf{L}=\{-3/11,2\}$]
   h) $x(3x+17-20x)(25+7x+3)=0$ [$\mathbf{L}=\{-4,0,1\}$]

10. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen in $\mathbf{Q}$.

   a) $x^2+4x+4=0$ [$\mathbf{L}=\{-2\}$]
   b) $x^2+9x+20=0$ [$\mathbf{L}=\{-4,-5\}$]
   c) $x^2-9=0$ [$\mathbf{L}=\{-3,3\}$]
   d) $x^2-2x+1=0$ [$\mathbf{L}=\{1\}$]
   e) $x^2-5x+6=0$ [$\mathbf{L}=\{2,3\}$]
   f) $x^2-9x+20=0$ [$\mathbf{L}=\{4,5\}$]
   g) $x^2-x-20=0$ [$\mathbf{L}=\{-4,5\}$]
   h) $x^2-5x-24=0$ [$\mathbf{L}=\{-3,8\}$]
   i) $x^2-2x=63$ [$\mathbf{L}=\{-7,9\}$]
   j) $x^2=5x+14$ [$\mathbf{L}=\{-2,7\}$]

# 4 Gleichungen mit Beträgen

Das Betragszeichen haben wir schon kennengelernt:

- $|3|=3$
- $|-3|=3$

Wenn wir in den Ausdruck $|x|$ eine positve Zahl einsetzen, dann können wir das Betragszeichen weglassen:

$$|x|=x \text{ ( für } x\geq 0)$$

Wenn wir in den Ausdruck $|x|$ eine negative Zahl einsetzen, dann können wir das Betragszeichen weglassen, wenn wir ein Minuszeichen vor die Zahl setzen:

$$|x|=-x \text{ ( für } x<0)$$

**Aufgabe:** Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichung in $\mathbf{Q}$.

$$6|x|-20=x+29$$

11. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichung in $\mathbf{Q}$.

a) $|x|=4$ $[\mathbf{L}=\{\pm 4\}]$

b) $0.5x+6=|x|$ $[\mathbf{L}=\{-4,12\}]$

c) $|x|=x+9$ $[\mathbf{L}=\{\}]$

d) $x+3|x|=50$ $[\mathbf{L}=\{-25,12.5\}]$

e) $8x+7=2|x|$ $[\mathbf{L}=\{-0.7\}]$

f) $4|x|+15=x$ $[\mathbf{L}=\{\}]$

g) $5(|x|-8)=3(x+16)$ $[\mathbf{L}=\{-11,44\}]$

h) $(|x|-3)(|x|+2)=0$ $[\mathbf{L}=\{\pm 3\}]$

i) $(x-|x|)(5-|x|)=0$ $[\underline{\underline{L=\mathbf{R}_0^+\cup\{-5\}}}]$