

1.3 Faktorisieren

(Thema aus dem Gebiet Algebra)

Inhaltsverzeichnis

1	Terme faktorisieren	2
2	(-1) ausklammern	2
3	Terme mit Klammern faktorisieren	3
4	Binomische Ausdrücke faktorisieren	4
5	Faktorisieren von Ausdrücken, die nicht binomische Formeln sind	5
6	Kürzen von Brüchen	6

1 Terme faktorisieren

Übungen

1. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $4x + 4y =$

b) $6p - 6q =$

c) $5b + 5 =$

d) $pq + qr =$

e) $pq - qr =$

f) $ax - bx - cx =$

2. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $15m - 18n =$

b) $4r + 12s =$

c) $4u - 6v =$

d) $p^2 - pq =$

e) $x^2 + 2x =$

f) $a^2 - a =$

g) $5ax + 5bx =$

h) $7by - 14bz =$

i) $49r^3 - 39r =$

j) $5x - 10y + 15z =$

k) $54u + 81v + 108w =$

l) $uv - u^2 + uw =$

m) $8cx + 24dx - 12ex =$

n) $p^2 - pq + pr - p =$

3. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $24p^2 + 16pq =$

b) $20u^2 - 55u =$

c) $65e + 78e^2 =$

d) $42z^3 + 78z^2 =$

e) $34y^4 + 17y^2 =$

f) $9ax + 57ax^2 =$

g) $63x^3 + 21x^2 + 70x =$

h) $52p^3q + 94p^2q^2 - 36pq^3 =$

2 (-1) ausklammern

Übungen

4. Klammere (-1) aus !

a) $-x - y =$

b) $-2p + q =$

c) $4a - 3b =$

d) $6u + 5v =$

e) $-c + 1 =$

f) $3y^2 - 5z^2 =$

g) $-8a + 4b - 7c =$

h) $-2x^2 - 15x + 9 =$

i) $4.5y + z - 0.8 =$

3 Terme mit Klammern faktorisieren

Übungen

5. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $(x+y)p + (x+y)q =$

c) $a(m-n) + 2(m-n) =$

e) $p(x+y) + x+y =$

g) $52a^3b^2(3x+6y) - 78ab^4(3x+6y) =$

b) $x(a+b) - (a+b)y =$

d) $n(y+z) - (y+z) =$

f) $2a(5v+10w) + 4b(10w+5v) =$

h) $66pq(m-1) + 102qr(m-1) - 48pr(m-1) =$

6. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $(2a-b)(x+y) + 3a(x+y) =$

c) $(8a-5b)(u+v) + (3a+4b)(u+v) =$

e) $(8a-5b)(u+v) + 3a(u+v) + 4b(u+v) =$

b) $(5m+6n)(a-b) - 4n(a-b) =$

d) $(7p+9q)(x-y) + (5p-6q)(x-y) =$

f) $(8c+12d)(u-2v) - (7c-2d)(u-2v) =$

7. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $(2x+2y)(2x-2y) =$

c) $(3p-6q)^2 =$

e) $(6x^2-8x+2)^2 =$

g) $(9x+3)^3 =$

i) $(ab+ac)^2 =$

b) $(5a+5b)^2 =$

d) $(18a-30b)(18a+30b) =$

f) $(2v-2w)^3 =$

h) $(4a-4b)^4 =$

j) $(3u^2-12u)^3 =$

8. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $bm+bn+cm+cn =$

c) $gv+gw-hv-hw =$

e) $14mp+14mq-9np-9nq =$

g) $amp-amq-anq+anp =$

i) $mx+nx+px-m-n-p =$

b) $xu-yu+xv-yv =$

d) $aq-bq-ar+br =$

f) $5cu-8cv+5du-8dv =$

h) $ax+ay+bx+by+cx+cy =$

9. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $21ax+35ay+20y+12x =$

c) $175ax+75ay-35bx-15by =$

e) $10a^2bx^2+4ab^2x^2-40a^2by^2-16ab^2y^2 =$

b) $32pv^2-36qv^2-80pw^2+90qw^2 =$

d) $88ax^3-22ax^2+132bx^3-33bx^2 =$

4 Binomische Ausdrücke faktorisieren

Es gibt 3 binomische Formeln:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Wenn ein Term ein binomischer Ausdruck sein soll, dann müssen sicher zwei Terme vorkommen, von denen man die Wurzel ziehen kann.

Beispiele:

- $x^2 + 4x + 4 =$
- $4c^2 - 12cd + 9d^2 =$
- $9a^2 - 16b^2 =$

Übungen

10. Faktorisiere soweit wie möglich.

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|--|
| a) $g^2 + h^2 + 2gh =$ | b) $x^2 - 2x + 1 =$ | c) $4n^2 + 4np + p^2 =$ |
| d) $p^2 - 8p + 16 =$ | e) $m^2 + 26m + 169 =$ | f) $\frac{4}{9}a^2 + ab + \frac{9}{16}b^2 =$ |
| g) $a^2 + a + \frac{1}{4} =$ | h) $25p^4 + 80p^2q^2 + 64q^4 =$ | i) $y^4 - 20y^2 + 100 =$ |
| j) $4m^2 + \frac{1}{4}n^2 - mn =$ | k) $15x^2 + 30xy + 15y^2 =$ | l) $12r^2 + 75s^2 - 60rs =$ |

11. Faktorisiere soweit wie möglich.

- | | | |
|---|----------------------|--------------------|
| a) $m^2 - n^2 =$ | b) $100x^2 - 36 =$ | c) $1 - 4z^2 =$ |
| d) $\frac{1}{25}m^2 - \frac{9}{4}n^2 =$ | e) $9x^4 - y^4 =$ | f) $6g^2 - 6h^2 =$ |
| g) $63v^2 - 28w^2 =$ | h) $u^8 - v^8 =$ | i) $a - a^3 =$ |
| j) $x^3 - 100x =$ | k) $4x^5 - 100x^3 =$ | |

12. Faktorisiere soweit wie möglich.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2 =$ | b) $p^2 + 2pq + q^2 - r^2 =$ |
| c) $x^2 - (y + z)^2 =$ | d) $u^2 - v^2 - 2wv - w^2 =$ |
| e) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab =$ | f) $49b^2 + 25c^2 - 70bc - 36d^2 =$ |

g) $r^2 - s^2 - t^2 + 2st =$

13. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $9a^2 - (a - b)^2 =$

b) $9p^4(a - b) - 25q^2(a - b) =$

c) $m^2 - n^2 - p^2 + 2np =$

d) $100x^2 - 4(7x - 2y)^2 =$

e) $48(a + b)^2 - 12(a - b)^2 =$

f) $(a - b)x^4 + (b - a)x^2 =$

5 Faktorisieren von Ausdrücken, die nicht binomische Formeln sind

- $a^2 + 9a + 20 =$
- $a^2 + a - 20 =$

Wie finden wir solche Klammern? Wir können ausprobieren, was in manchen Fällen aber sehr lange dauert. Es gibt aber ein einfaches Schema, mit dem wir solche Aufgaben lösen können.

Achtung: Dieses Schema gilt nur, wenn vor der Variable im Quadrat keine Zahl steht!

- Zerlege die Zahl (mit Vorzeichen) des Ausdruckes in zwei Faktoren. Finde alle Möglichkeiten.
- Zähle jeweils die beiden Zahlenpaare zusammen. Wenn eines die Zahl des mittleren Ausdruckes ergibt, dann nimm dieses Zahlenpaar.
- Schreibe zwei Klammerpaare hin und schreibe die Variable in beiden Klammern auf die linke Seite.
- Schreibe dann die erste Zahl des Zahlenpaares auf die rechte Seite der ersten Klammer (mit Vorzeichen) und die zweite Zahl des Zahlenpaares auf die rechte Seite der zweiten Klammer (mit Vorzeichen).

Wir wenden dieses Schema nun auf das erste Beispiel dieses Abschnittes an:

Aufgabe 1: Faktorisiere den Ausdruck $a^2 + 9a + 20$!

Aufgabe 2: Faktorisiere den Ausdruck $a^2 + a - 20$!

14. Faktorisiere soweit wie möglich.

a) $x^2 + 7x + 12 =$

b) $a^2 + 13a + 40 =$

c) $z^2 + 20z + 96 =$

d) $m^2 + 5m + 6 =$

e) $p^2 + 5p + 4 =$

f) $b^2 + 10b + 9 =$

g) $x^2 + x - 12 =$

h) $x^2 - x - 12 =$

i) $x^2 - 7x + 12 =$

j) $x^2 + 8x + 15 =$

6 Kürzen von Brüchen

15. Kann gekürzt werden ? Wenn ja, dann kürze soweit wie möglich.

a) $\frac{a+b+c}{a+b+d}$

b) $\frac{a \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot d}$

c) $\frac{a+b+c}{a+b+c}$

d) $\frac{a \cdot b + c \cdot d}{a}$

e) $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e \cdot f}$

f) $\frac{a \cdot b \cdot c}{c \cdot d \cdot e}$

16. Kürze soweit wie möglich.

a) $\frac{a^2 - 16}{a - 4}$

b) $\frac{x - y}{y - x}$

c) $\frac{2y + 2}{5y + 5}$

d) $\frac{rs - rt}{su - tu}$

e) $\frac{1 - a}{4a - 4}$

f) $\frac{x^2 + 2x - 63}{7 - x}$

g) $\frac{p^3 - p^2}{p^3 + p^2}$

h) $\frac{2s + 2t}{s^2 - t^2}$

i) $\frac{-36x^2y}{12x^2y - 60xy}$

j) $\frac{3v + 9}{5v^2 - 45}$

k) $\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 25}$

l) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

m) $\frac{y^4 - y^2}{y^2 + 2y + 1}$

n) $\frac{-x^2 + 5x - 4}{16 - 8x + x^2}$

o) $\frac{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}{x^2 - y^2 - 2yz - z^2}$

p) $\frac{64c^2 - 176c + 121}{121 - 64c^2}$

q) $\frac{r^2 - 2rs + s^2}{5rs - 5r^2}$

r) $\frac{10x + 25y}{4x^2 + 20xy + 25y^2}$