

Trigonometrie II - Berechnungen am allgemeinen Dreieck mit $\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ$ und $\gamma < 90^\circ$

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Der Sinussatz	2
3	Der Cosinussatz	3

1 Einführung

Bisher haben wir Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck angestellt. Dies geschah meistens mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und den trigonometrischen Funktionen \sin , \cos , \tan (z.T. auch mit dem Höhensatz,...). Wir beschäftigen uns nun mit dem **allgemeinen Dreieck** und lernen neue Formeln (Sätze) kennen, die uns auch Berechnungen am allgemeinen Dreieck erlauben. Wir beschränken uns allerdings auf Dreiecke, deren Innenwinkel allesamt kleiner als 90° sind. Sonst müssten wir z.B. $\sin(120^\circ)$ berechnen, was wir noch nicht behandelt haben.

2 Der Sinussatz

Aufgabe: Bei einem Dreieck sind $a = 6 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ und $\alpha = 50^\circ$ bekannt. Berechne β (Tipp: Zeichne h_c als Hilfslinie ein). [$\beta = 39.67^\circ$]

Lösung

Wir können die gleiche Rechnung auch ohne konkrete Zahlen durchführen:

Satz 1 (Sinussatz) *Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ mit $\alpha, \beta, \gamma \leq 90^\circ$ gilt:*

Später werden wir sehen, dass dieser Satz auch für stumpfwinklige Dreiecke gilt. In Worten bedeutet dieser Satz:

„Bei einem Dreieck ist das Verhältnis zwischen dem Sinus eines Winkels und der gegenüberliegenden Seite immer gleich“

Übungen

1. Von einem Dreieck sind bekannt: $\alpha = 43^\circ, \gamma = 55^\circ$ und $a = 3$ cm. Berechne c . [$c \approx 3.60$ cm]
2. Von einem Dreieck sind bekannt: $\alpha = 70^\circ, \beta = 50^\circ$ und $c = 6$ cm. Berechne die Längen a und b !
[$a \approx 6.51$ cm, $b \approx 5.31$ cm]
3. Gegeben ist ein Dreieck mit $w_\gamma = 5,3$ m (Winkelhalbierende), $\alpha = 80^\circ$ und $\gamma = 57^\circ$. Berechne die Seite b !
[5.1 m]
4. Zwei Punkte A und B am Ufer eines Flusses sind 45 m voneinander entfernt. Am anderen Ufer steht ein Baum C . Es werden folgende Winkel gemessen: $\angle(CAB) = 72^\circ$ und $\angle(CBA) = 83^\circ$. Wie breit ist der Fluss ?
[100.51 m]
5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Sinussatz und der trigonometrischen Funktion $\sin(\alpha) = \frac{GK}{H}$?

3 Der Cosinussatz

Aufgabe: Von einem Dreieck $\triangle ABC$ sind die Längen $a = 6$ cm, $b = 4$ cm und $c = 7$ cm bekannt. Berechne die Größe des Innenwinkels α . (Tipp: Zeichne h_c als Hilfslinie ein und berechne $|\overline{AH_c}|$). [$\alpha = 58.81^\circ$]

Lösung:

Der allgemeine Lösungsweg:

Satz 2 (Cosinussatz) *Für jedes Dreieck ΔABC mit $\alpha, \beta, \gamma \leq 90^\circ$ gilt:*

Übungen

6. Von einem Dreieck ΔABC sind die Längen von b, c und α bekannt. Sie betragen 6cm, 8cm und 50° . Berechne a und die Größen der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks !

$$[a = 6.19 \text{ cm}, \beta = 47.97^\circ, \gamma = 82.03^\circ]$$

7. Von einem allgemeinen Dreieck sind bekannt: $a = 3.5 \text{ cm}$ und $c = 5.2 \text{ cm}$ und $\beta = 55^\circ$. Berechne b und die fehlenden Winkelgrößen !
 $[b = 4.29 \text{ cm}, \alpha = 41.93^\circ, \gamma = 83.07^\circ]$
8. Zwei Orte A und B liegen auf verschiedenen Seiten eines Sees. Zwei Strassen, die von A und B geradlinig ausgehen, treffen sich in C unter einem Winkel von 57° . Wie weit ist A von B entfernt (Luftlinie), wenn die Entfernung von B bis C 5.4 km und die Entfernung von A bis C 8.4 km beträgt ? $[c \approx 7.09 \text{ km}]$
9. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Cosinussatz und dem Satz des Pythagoras ?
10. Wie lang ist ein Kreisabschnitt in einem Kreis mit $r = 16 \text{ cm}$, wenn die zugehörige Sehnenlänge $s = 23.5 \text{ cm}$ ist ?
 $[26.39 \text{ cm}]$
11. Gegeben ist ein Dreieck mit $b = 58 \text{ cm}, c = 98 \text{ cm}$ und $\alpha = 81^\circ$. Berechne die Seite a und den Winkel β !
 $[a = 105.78 \text{ cm}, \beta = 32.79^\circ]$
12. Gegeben ist ein Parallelogramm mit: $b = 16.1 \text{ cm}, c = 44.2 \text{ cm}$ und $\gamma = 99^\circ$. Berechne die Seiten, Winkel, Diagonalen und den Flächeninhalt !
 $[a = 44.2 \text{ cm}, d = 16.1 \text{ cm}, \alpha = 99^\circ, \beta = \delta = 81^\circ, e = 49.36 \text{ cm}, f = 44.60 \text{ cm}, 702.78 \text{ cm}^2]$
13. Gegeben ist ein Trapez mit $a = 41 \text{ cm}, b = 23 \text{ cm}, c = 9,6 \text{ cm}$ und $\beta = 81^\circ$. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel !
 $[\gamma = 99^\circ, \alpha \approx 39.25^\circ, \delta \approx 140.75^\circ, d \approx 35.90 \text{ cm}, e \approx 43.76 \text{ cm}, f \approx 26.27 \text{ cm}, A \approx 574.73 \text{ cm}^2]$