1.10 Geometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Die zentrische Streckung

1.1 Einführung und Definition der zentrischen Streckung

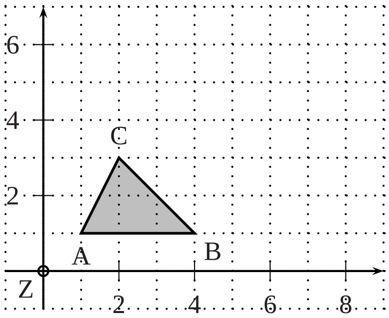
Eine kleine Einführung zur zentrischen Streckung:

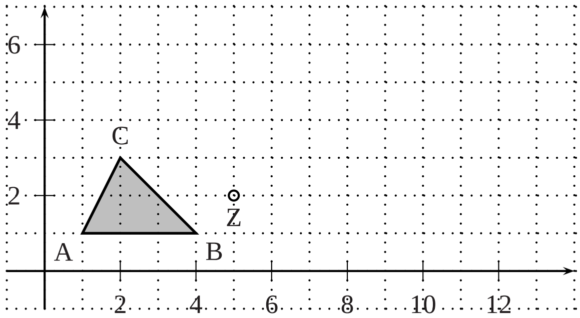
Gegeben sind zwei Bilder der Laokoon-Statue im Vatikanischen Museum in Rom. Das linke Bild ist doppelt so gross und doppelt so breit wie das rechte Bild. Wähle auf dem grossen Bild einen Punkt aus, verbinde diesen mit dem entsprechenden Punkt im kleinen Bild und verlängere die Verbindungssstrecke bis zum rechten Bildrand. Gehe in derselben Weise mit anderen Punkten vor.

Was fällt Dir auf ?

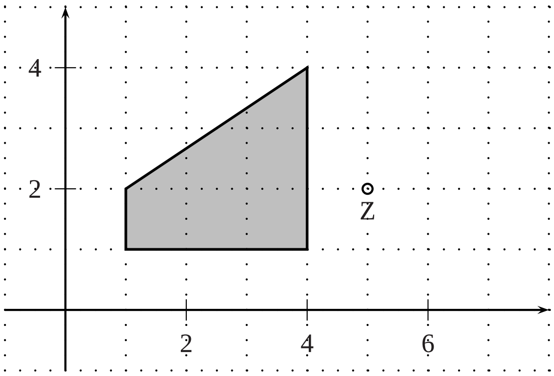
Zwei weitere Beispiele:

- Gegeben sei ein Dreieck ΔABC mit $A(1|1), B(4|1)$ und $C(2|3)$. Es soll nun zentrisch gestreckt werden, wobei das Streckzentrum bei $Z(0|0)$ liegt und $k = 2$ ist.
- Wir betrachten noch einmal das gleiche Dreieck (ΔABC mit $A(1|1), B(4|1)$ und $C(2|3)$). Diesmal liegt das Streckzentrum in $Z(5|2)$ und $k = -2$.





- Gegeben sei ein Viereck $\Delta ABCD$ mit $A(1|1), B(4|1), C(4|4)$ und $D(1|2)$. Es soll nun zentrisch gestreckt werden, wobei das Streckzentrum in $Z(5|2)$ liegt und der Streckfaktor $k = -0.5$ ist. Dann sieht das Bildviereck $\Delta A'B'C'D'$ folgendermassen aus:



An den drei oberen Beispielen können wir beobachten:

Der Vollständigkeit halber noch eine mögliche Definition der zentrischen Streckung.

Definition 1 *Gegeben sei ein Punkt Z und eine reelle Zahl $k \neq 0$. Die **Zentrische Streckung** mit **Streckzentrum** Z und dem **Streckfaktor** k ist eine Abbildung, die jedem Punkt P der Ursprungsfigur einen Bildpunkt P' so zuordnet, dass gilt:*

1. *Z, P und P' liegen auf einer Geraden.*

2. *Für $k > 0$ liegen P und P' auf derselben Seite von Z, für $k < 0$ auf verschiedenen Seiten.*
3. $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$.

Übungen

1. Zeichne das Viereck $ABCD$ mit $A(1|2), B(4|1), C(5|4), D(2|4)$. Konstruiere das Bildviereck bei der zentrischen Streckung mit

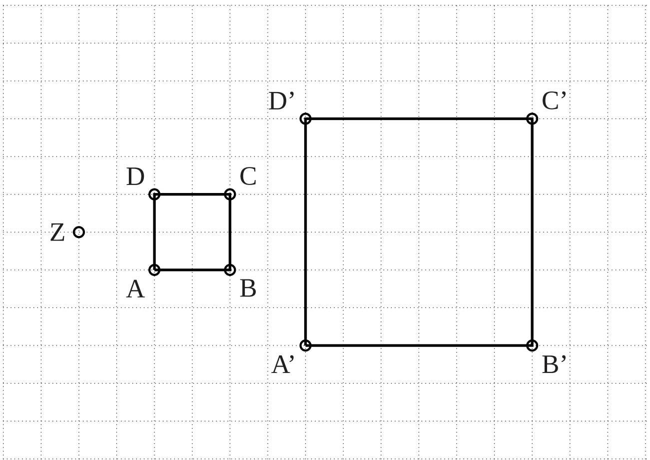
   a) $Z(0|3); k = 2$ b) $Z(0|3); k = -3$

2. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(1|1), B(3|2)$ und $C(1|4)$. Konstruiere das Bilddreieck bei der zentrischen Streckung mit

   a) $Z(0|0); k = \frac{3}{2}$ b) $Z(0|0); k = -\frac{1}{2}$ c) $Z(0|1); k = -1$

3. Gegeben sind die Punkte $A(3|3), A'(5|5), B(-2|0), B'(-4|2)$. Gibt es eine zentrische Streckung mit Streckzentrum S und Streckfaktor k, die A auf A' und zugleich B auf B' abbildet ? Begründe Deine Antwort.

1.2 Flächeninhalte bei zentrischer Streckung



Fülle folgende Lücke aus: $k = \ldots \qquad \ldots \cdot A = A'$.

Satz 1 *Wird ein Vieleck mit dem Flächeninhalt A durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor k abgebildet auf ein Vieleck mit dem Flächeninhalt A', dann gilt:*

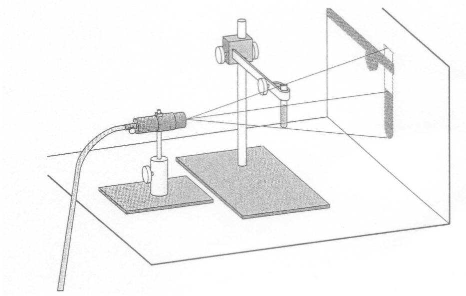
Übungen

4. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 wird zentrisch gestreckt. Wie muss der Streckfaktor k gewählt werden, damit sich sein Flächeninhalt verdoppelt ? [$\pm\sqrt{2}$]

5. Ein Dreieck mit $a = 14\,\text{cm}, \alpha = 60^\circ$ und $h_a = 5\,\text{cm}$ wird auf ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $210\,\text{cm}^2$ abgebildet. Wie gross sind a', α' und h'_a in diesem Dreieck ? [$a' = 34.29\,\text{cm}, \alpha' = 60^\circ, h'_a = 12.25\,\text{cm}$]

6. Gegeben ist ein Dreieck mit $a = 5\,\text{cm}, b = 5\,\text{cm}$ und $c = 6\,\text{cm}$. Dieses Dreieck soll nun mit zwei Geraden, die parallel zur Seite c sind, in drei gleich grosse Teile zerlegt werden. Auf welcher Höhe müssen die Geraden gezeichnet werden ? [$0.73\,\text{cm}, 1.69\,\text{cm}$]

7. Ein Viereck mit dem Umfang $U = 20\,\text{cm}$ und dem Flächeninhalt $A = 22\,\text{cm}^2$ wird so gestreckt, dass das Bildviereck den Umfang $U' = 15\,\text{cm}$ besitzt. Bestimme des Flächeninhalt des Bildvierecks. [$16.5\,\text{cm}^2$]



8. Um Versuchsanordnungen besser sichtbar zu machen, verwendet man oft den Schattenwurf.

   a) Wo muss man die Lichtquelle aufstellen, um einen 15 cm hohen Gegenstand, der 2.5 m von der Wand entfernt ist, so abzubilden, dass das Bild 90 cm hoch ist ? [3 m von der Wand entfernt]

   b) Wo muss man die Lichtquelle aufstellen, damit ein parallel zur Wand verlaufendes, 3.4 cm langes und 2.2 cm breites Rechteck (Dia), das 3.5 m von der Wand entfernt ist, auf ein $1\,\text{m}^2$ grosses Rechteck abgebildet wird ? [3.60 m von der Wand entfernt]

2 Ähnlichkeit

Einführungsaufgabe:

Zeichne das Dreieck ABC mit $A(2|3), B(4|2)$ und $C(5|4)$. Spiegle das Dreieck an der Geraden durch A und C. Strecke das entstandene Dreieck (Bild) dann von A aus mit $k = 2$.

- Vergleiche die Winkel des Ursprungs- und des Bilddreiecks.
- Berechne mit Hilfe eines Lineals die Verhältnisse der entsprechenden Seiten. Was fällt Dir auf ?
- Vergleiche die Flächeninhalte des Ursprungs- und des Bilddreiecks. Was fällt Dir auf ?

Für die nächste Definition rufen wir uns kurz den Begriff der Kongruenzabbildung in Erinnerung: Eine Kongruenzabbildung liegt dann vor, wenn Ursprungs- und Bildfigur deckungsgleich sind. Kongruenzabbildungen sind zusammengesetzt aus Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung und Translation. Mit Hilfe der Kongruenzabbildungen und der zentrischen Streckung definieren wir nun den Begriff der Ähnlichkeitsabbildung:

Definition 2 *Unter einer Ähnlichkeitsabbildung verstehen wir eine geometrische Abbildung, die sich aus Kongruenzabbildungen und zentrischen Streckungen zusammensetzen lässt.*

Ein Beispiel einer Ähnlichkeitsabbildung ist unsere Einführungsaufgabe, sie ist zusammengesetzt aus einer Spiegelung und einer zentrischen Streckung.

Der Begriff der Ähnlichkeit lässt sich nun ganz leicht definieren:

Definition 3 *Die Figur F ist ähnlich zur Figur G (in Zeichen $F \approx G$), wenn man F durch eine Ähnlichkeitsabbildung in G überführen kann.*

Die Dreiecke in unserem Einführungsbeispiel sind also zueinander ähnlich, weil man das Ursprungsdreieck durch Spiegelung und zentrische Streckung in die Bildfigur überführen kann.

Bei der Einführungsaufgabe in diesem Abschnitt haben gesehen, dass sowohl die Kongruenzabbildungen als auch die zentrische Streckung winkel- und geradentreue Abbildungen (d.h. Winkel werden auf gleich grosse Winkel, Geraden werden auf Geraden abgebildet) sind. Weiter sind die Streckenverhältnisse der entsprechenden Seiten gleich. Dazu können wir auch noch einen Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten formulieren. Es gilt folgender Satz:

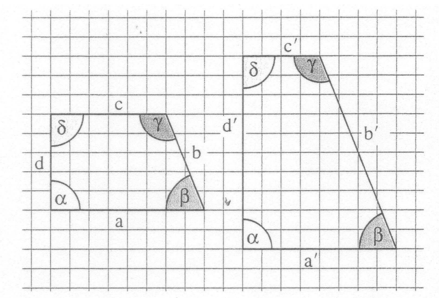
Satz 2 *Für ähnliche Vielecke F und G gilt:*

- *entsprechende Winkel sind gleich gross.*
- *sämtliche Längenverhältnisse von entsprechenden Strecken sind gleich gross.*
- *Sind die Seiten von G $|k|$-mal so lang wie die von F, so ist der Flächeninhalt k^2-mal so gross wie derjenige von F.*

Gilt auch die Umkehrung der einzelnen Punkte dieses Satzes ? Finde das selbst heraus mit Hilfe der folgenden Übung:

Übung

9. a) Die beiden Vierecke stimmen in entsprechenden Winkeln überein. Sind sie zueinander ähnlich?



b) Ein Quadrat und ein Rhombus (Parallelogramm mit 4 gleich langen Seiten) haben beide die Seitenlänge $s = 10\,\mathrm{cm}$. Der Rhombus hat die Innenwinkel 30° und 150°. Beides sind Vierecke mit gleich langen Seiten. Sind sie ähnlich zueinander ?

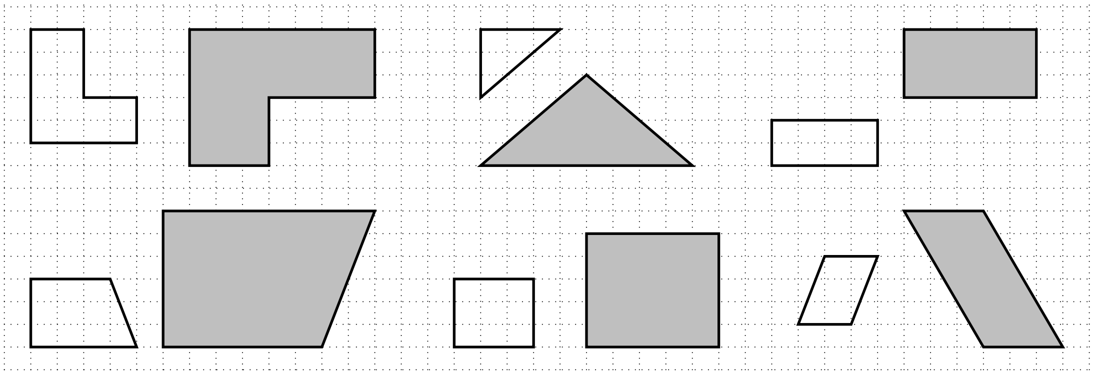
c) Ist es möglich zwei Dreiecke mit gleichen Innenwinkeln zu zeichnen, die nicht ähnlich zueinander sind ?

Die letzte Aufgabe hat uns also gezeigt, dass die Umkehrung des Satzes 2 nicht immer gilt. Eine Ausnahme bildet das Dreieck: Beim ersten Punkt von Satz 4 (Winkel) gilt die Umkehrung immer. Wir können also den folgenden Satz formulieren:

Satz 3 *(Ähnlichkeitssatz für Dreiecke) Wenn zwei Dreiecke in entsprechenden Winkeln übereinstimmen, dann sind sie zueinander ähnlich; also sind auch die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich gross.*

Übungen

10. Untersuche, ob die nebeneinanderstehenden Vielecke ähnlich zueinander sind. Falls die Antwort ja ist: Mit welcher/welchen Abbildungen erhält man die graue Figur aus der weissen Figur (Spiegelung, Drehung, zentrische Streckung) ? [nein, ja, nein, ja, ja, nein]

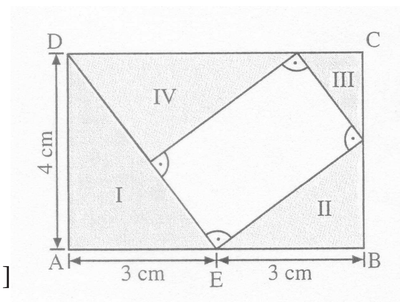


11. Können zwei Dreiecke ABC mit $a = 4\,\text{cm}, b = 2.6\,\text{cm}$ und $\gamma = 40^\circ$ und $A'B'C'$ mit $a' = 10\,\text{cm}, b' = 6.7\,\text{cm}$ und $\gamma' = 40^\circ$ zueinander ähnlich sein ? [nein]

12. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, das in vier Dreiecke und ein Rechteck aufgeteilt ist.

    a) Zeige, dass die vier Teildreiecke I bis IV ähnlich sind.

    b) A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV} bezeichnen die Flächeninhalte der Teildreiecke I bis IV. Berechne sie (Rechne mit exakten Zwischenresultaten, runde die Schlussresultat auf 2 Stellen nach dem Komma). [$A_I = 6\,\text{cm}^2, A_{II} \approx 3.38\,\text{cm}^2, A_{III} \approx 1.15\,\text{cm}^2, A_{IV} \approx 5.27\,\text{cm}^2$]

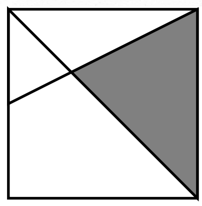


13. Berechne den Inhalt des schraffierten Flächenstückes, wobei M der Mittelpunkt der Seite ist, wenn

    a) die Seitenlänge des Quadrates 12 cm beträgt. [$48\,\text{cm}^2$]

    b) die Seitenlänge des Quadrates a beträgt. [$a^2/3$]

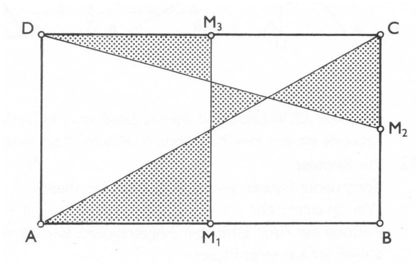
M



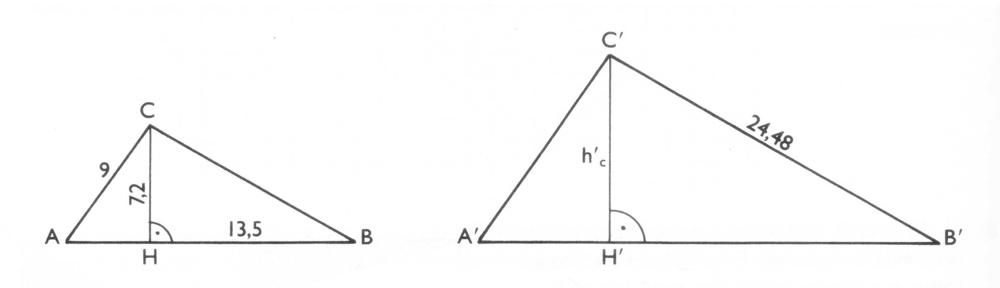
14. M_1, M_2 und M_3 sind Seitenmittelpunkte des Rechtecks $ABCD$. Welchen Bruchteil des Rechteckinhaltes macht der Inhalt der schraffierten Fläche aus,

    a) wenn $|\overline{AB}| = 20$ und $|\overline{AD}| = 10$? [29.17%]

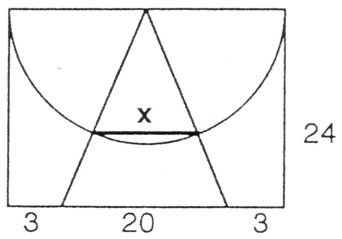
    b) wenn keine Angaben über die Seiten vorhanden sind ? [29.17%]



15. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind zueinander ähnlich. Alle Längen sind in cm angegeben. Berechne die Längen der folgenden Strecken: $\overline{AH}$, $\overline{BC}$, h'_c und $\overline{A'C'}$. $[|\overline{AH}| = 5.4, |\overline{BC}| = 15.3, h'_c = 11.52, |\overline{A'C'}| = 14.4]$



16. Berechne die Streckenlänge von x. $[x = 10]$



17. Beweise: In einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c und den Höhen h_a, h_b und h_c gilt: $b : h_a = a : h_b$.

18. Zeige, dass bei einem rechwinkligen Dreieck gilt:

a) $h^2 = p \cdot q$

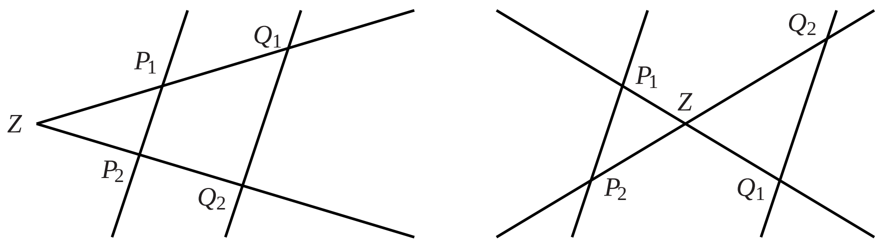
b) $b^2 = c \cdot q$

c) (Zusatz) Es gilt auch: $a^2 = c \cdot p$. Folgere aus $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ den Satz von Pythagoras.

3 Die Strahlensätze

Wenn zwei durch einen Punkt S (Scheitel) verlaufende Geraden (Strahlen) von zwei parallelen Geraden geschnitten werden, die nicht durch den Scheitel gehen, dann gelten die folgenden Aussagen:

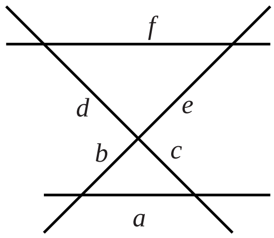
Satz 4 *(Strahlensätze) Gegeben sind die untenstehenden Figuren:*



Es gelten folgende Beziehungen:

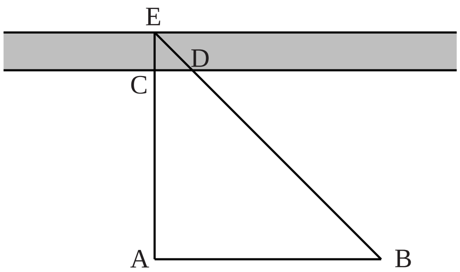
Übungen zu den Strahlensätzen

19. Die Strecken a, b, c, d, e und f gehen jeweils von Schnittpunkt zu Schnittpunkt. Weiter sind die Strecken a und f parallel zueinander. Berechne die Strecken c und e, wenn $a = 3\,\text{cm}, b = 2\,\text{cm}, d = 5\,\text{cm}$ und $f = 7\,\text{cm}$. [$c \approx 2.14\,\text{cm}, e \approx 4.67\,\text{cm}$]

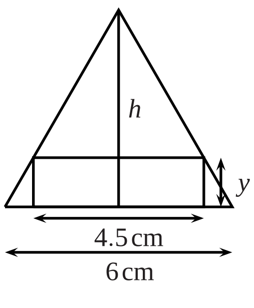


20. Wie hoch ist ein Haus, das einen Schatten von 33 m Länge wirft, wenn der Schatten eines Stabes, der 5 m hoch ist, bei gleichem Sonnenstand einen Schatten von 3 m wirft ? [55 m]

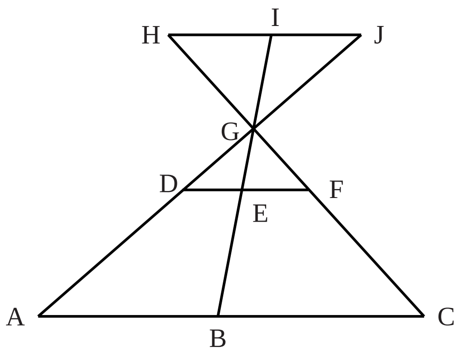
21. Wir haben folgende Angaben $\overline{AB} = 20\,\text{m}$, $\overline{AC} = 30\,\text{m}$ und $\overline{CD} = 5\,\text{m}$ Ufer sind parallel, $\overline{AE}$ liegt senkrecht zum Ufer). Bestimme die Breite $\overline{CE}$ des Flusses. [10 m]



22. In ein gleichseitiges Dreieck mit $a = 6\,\text{cm}$ kann man Rechtecke so einzeichnen, dass eine Seite auf der Grundseite des Dreiecks liegt und die übrigen beiden Ecken auf den anderen beiden Dreiecksseiten. Berechne die zweite Seite y des Rechtecks, wenn die horizontale Seite 4.5 cm lang ist. [$y = 1.3\,\text{cm}$]



23. Die Strecken $\overline{AD} = 3.6\,\text{cm}, \overline{DG} = 1.8\,\text{cm}, \overline{BC} = 3.9\,\text{cm}, \overline{CF} = 3.2\,\text{cm}, \overline{GH} = 2.4\,\text{cm}$ und $\overline{IJ} = 1.7\,\text{cm}$ sind bekannt. Die horizontalen Linien sind parallel zueinander. Berechne die Strecken $\overline{GF}, \overline{HI}, \overline{AB}, \overline{GJ}, \overline{DE}$ und $\overline{EF}$. [$\overline{FG} = 1.6\,\text{cm}, \overline{GJ} = 2.7\,\text{cm}, \overline{HI} = 1.95\,\text{cm}, \overline{AB} = 3.4\,\text{cm}, \overline{DE} \approx 1.13\,\text{cm}, \overline{EF} = 1.3\,\text{cm}$]



24. Löse die folgenden Gleichungen mit Konstruktion:

a) $\frac{3}{4} = \frac{9}{x}$ b) $\frac{3}{5} = \frac{x}{8}$ c) $\frac{10}{x} = 2$

25. Ein kugelförmiger Gasbehälter von 36 cm Durchmesser wird von einem 10-Rappen-Stück (21 mm Durchmesser) verdeckt, wenn man die Münze 30 cm vom Auge weghält. Wie weit ist das Zentrum des Gasbehälters vom Beobachter entfernt ? [$d \approx 5.1\,\text{m}$]

26. Hält man eine Erbse mit dem Durchmesser von 3 mm in einem Abstand von 30 cm vom Auge entfernt, so verdeckt sie gerade den ca. 350000 km vom Auge entfernten Vollmond (Distanz bis zum Zentrum des Mondes), den wir näherungsweise als kugelförmig betrachten. Berechne den ungefähren Durchmesser des Mondes. [3500 km]

27. In das gleichseitige Dreieck Δ_1 mit $a = 10\,\text{cm}$ ist ein gleichschenkliges Dreieck Δ_2 so eingezeichnet, dass die Basen parallel sind und die Spitze C auf die Basis von Δ_1 zu liegen kommt. Berechne alle Seiten von Δ_2, wenn für Δ_2 gilt: $h_c = 6\,\text{cm}$. [3.07 cm, 6.19 cm]

28. (Zusatz)

a) Konstruiere zu den drei gegebenen Strecken $a = 4\,\text{cm}, b = 6\,\text{cm}$ und $c = 3\,\text{cm}$ eine vierte Strecke d, so dass gilt: $a : b = c : d$.

b) Berechne d nun rechnerisch und vergleiche Dein Ergebnisse aus $a)$ und $b)$.

29. (Zusatz) Konstruiere die Strecken a und b, wenn ihr Streckenverhältnis $a : b = 5 : 3$ bekannt ist und

a) ihre Summe $a + b = 12$

b) ihre Differenz $a - b = 2.4$ ist.