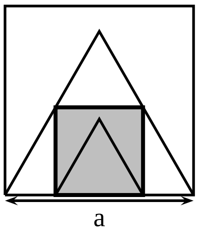
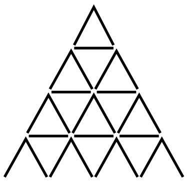
# alte Maturaufgaben zu „Folgen+Reihen“

## 1 2006/2007

1. (5 P.) In ein Quadrat mit der Seitenlänge $a$ wird ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, in dieses wiederum ein Quadrat, usw. (siehe Abbildung).
   a) Berechne die Seitenlänge des schraffierten Quadrats in Abhängigkeit von $a$ (falls Du die Lösung nicht findest, dann nimm an, $a = 10\,\text{cm}$. Diese Lösung gibt dann einen Punkt weniger).
   b) Wir betrachten die Folge der Flächeninhalte der Quadrate (GF), wobei $a_1$ für das grösste Quadrat verwendet wird, $a_2$ für das zweitgrösste, usw. Dazu sei $a = 10\,\text{cm}$. Berechne (näherungsweise) die Summe $a_1 + a_2 + ... + a_n$, wenn $n \to \infty$ ?




2. (5 P.) Ein Kartenhaus wird nach nebenstehendem Schema gebaut. Diese Figur zeigt ein 4-stöckiges Haus. Beachte, dass zuunterst keine Karten liegen.
   a) Wie viele Karten braucht es für ein 8-stöckiges Haus ?
   b) Wie viele Karten braucht es für ein n-stöckiges Haus ?
   c) Wie viele vollständige Stockwerke könnte man mit 2000 Karten bauen ?



## 2 2009/2010

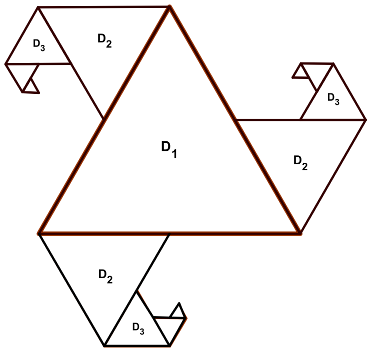
1. (4 P.) Ein Herr geht aus dem Wirtshaus nach Hause. Der Nachhauseweg beträgt 1000 Meter. Sein Hund läuft gleichzeitig vor, ist schneller und deshalb eher am Ziel, kehrt um und trifft seinen Herrn, der inzwischen natürlich weitergegangen ist. Der Hund läuft wieder in Richtung Heima, kehrt um usw. Zunächst liegt also noch eine Weglänge von 1000 Metern vor den beiden. Jedes Mal, wenn der Herr wieder auf den zurückkehrenden Hund trifft, beträgt seine Entfernung von zu Hause noch 60% des ursprünglichen Weges.
   a) Berechne, wie oft der Hund beim Haus angekommen ist, bevor das Zusammentreffen mit seinem Herrchen weniger als 5 Meter vom Haus entfernt ist.
   b) Berechne den Weg, den der Hund zurück legt, bis der Herr beim Haus ist.

2. (4 P.) Auf der nebenstehenden Abbildung ist eine Dreiecksblume zu sehen, bei der alle Dreiecke gleichseitig sind. Das grösste Dreieck hat die Seitenlänge 2, beim Übergang zum nächst kleineren Dreieck wird die Seitenlänge halbiert. Die neu hinzukommenden Dreiecke werden mit $D_2, D_3, \ldots$ bezeichnet.

   a) **Berechne**: Welche Seitenlänge hat ein Dreieck $D_{18}$ ?

   b) $N(D_n)$ bezeichne die Anzahl Dreiecke $D_n$. **Berechne**: $N(D_1) + N(D_2) + \ldots. + N(D_{15})$.

   c) Wie gross ist die Fläche (als Grenzwert) der Dreiecksblume (die aus unendlich vielen Dreiecken besteht) ?



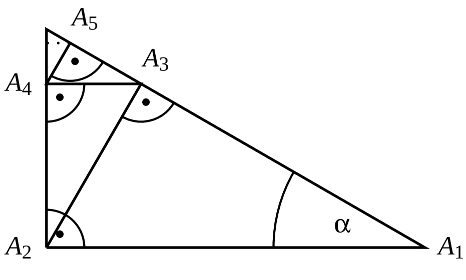

# 3 2010/2011

1. **Folgen und Reihen (9 Punkte)** Vom Ursprung eines Koordinatensystems geht eine Zickzacklinie (bestehend aus unendlich vielen Teilstrecken, siehe Zeichnung) in gleicher Art über die Punkte A(100|100), B(190|10), C(271|91), $\ldots$ . Sowohl die $x$-Koordinaten als auch die $y$-Koordinaten werden durch geometrische Reihen beschrieben.

   a) Berechne die Koordinaten des Punktes D.
   b) Berechne die Koordinaten des Punktes X (24.Buchstabe des Alphabets).
   c) Berechne die Gesamtlänge der unendlichen Zickzacklinie.
   d) Berechne die Koordinaten des Punktes, auf welchen die Zickzacklinie zielt.

# 4 2011/2012

1. (8 P.) **Folgen und Reihen** Gegeben ist der untenstehende Streckenzug, bestehend aus unendlich vielen Strecken. Wir setzen $a_1 = \overline{A_1A_2} = 10\,\text{cm}, a_2 = \overline{A_2A_3}, a_3 = \overline{A_3A_4}$, ... wobei diese Streckenlängen eine geometrische Folge bilden. Weiter sei $\alpha = 30°$.




   a) Berechne die Länge der 10. Strecke.
   b) Berechne die Summe $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{51}$.
   c) Wie viele Streckenlängen müssen mindestens aufsummiert werden, damit der Streckenzug länger als 19.999 cm wird?
   d) Bei dieser Teilaufgabe ist $a_1$ unbekannt, während $\alpha$ immer noch 30° beträgt. Wie lang muss $a_1$ gewählt werden, damit der Streckenzug einen Grenzwert von 50 cm hat?

# 5 Lösungen 2006/2007

1. (5 P.) In ein Quadrat mit der Seitenlänge $a$ wird ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, in dieses wiederum ein Quadrat, usw.

   a) (3 P.) Berechne die Seitenlänge des schraffierten Quadrats in Abhängigkeit von $a$.

   - $x$ bezeichne die Seitenlänge des Quadrates.
   - Höhe des gleichseitigen Dreiecks: $h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ (1 P.)
   - Die Dreiecke $\Delta ABC$ und $ADE$ sind ähnlich. Die Strecke $\overline{AD}$ ist halb so lang wie die Strecke $\overline{DE}$, weil wir ein 90°/60°/30°-Dreieck haben.
   - Wir erhalten: (2 P.)
   $$\frac{x}{a/2 - x/2} = \frac{\sqrt{3}a/2}{a/2} \Rightarrow \underline{\underline{x = a(2\sqrt{3} - 3)}}$$
   - Variante:
     - (2 P.) $f(x) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}x$
     - (1 P.) Es gilt: $f\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right) = x \Rightarrow \sqrt{3}(a - x) = 2x \Rightarrow \sqrt{3}a - \sqrt{3}x = 2x \Rightarrow \sqrt{3}a = 2x + \sqrt{3}x \Rightarrow x(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}a \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}a}{2 + \sqrt{3}}$

   b) (2 P.) Wir betrachten die Folge der Flächeninhalte der Quadrate (GF), wobei $a_1$ für das grösste Quadrat verwendet wird, $a_2$ für das zweitgrösste, usw. Dazu sei $a = 10\,\text{cm}$. Berechne (näherungsweise) die Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, wenn $n \to \infty$ ?

   - $a_1 = 100$
   - (0.5 P.) Berechnung von $a_2$: $x = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 10}{2 + \sqrt{3}} \approx 4.6410 \Rightarrow x^2 \approx 21.539\,\text{cm}^2$
   - (Berechnung von $a_3$: $x = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 4.6410}{2 + \sqrt{3}} \approx 2.1539 \Rightarrow x^2 \approx 4.6393\,\text{cm}^2$)
   - (0.5 P.) $q = a_2 : a_1 = 0.2154$ (Bestätigung: $a_3 : a_2 = 0.2154 \quad \checkmark$)
   - (1 P.) $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a_1}{1 - q} = \dfrac{100}{1 - 0.2154} = \underline{\underline{127.452}}$
   - Exaktes Ergebnis: $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}a}{2 + \sqrt{3}}, a_2 = \dfrac{\sqrt{3}a_1}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{2 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{3a}{(2 + \sqrt{3})^2}$
   - $\sqrt{q} = a_2 : a_1 = \dfrac{\dfrac{3a}{(2 + \sqrt{3})^2}}{\dfrac{\sqrt{3}a}{2 + \sqrt{3}}} = \dfrac{3a(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}a(2 + \sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow q = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{3}{7 + 4\sqrt{3}}$

2. (5 P.) Ein Kartenhaus wird nach nebenstehendem Schema gebaut. Diese Figur zeigt ein 4-stöckiges Haus. Beachte, dass zuunterst keine Karten liegen.

a) (2 P.) Wie viele Karten braucht es für ein 8-stöckiges Haus ?

- | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
  |---|---|---|---|---|---|---|---|
  | 2 | 7 | 15 | 26 | 40 | 57 | 77 | 100 |

b) (2 P.) Wie viele Karten braucht es für ein n-stöckiges Haus ?

- Wir nehmen zuerst an, dass zuunterst Karten liegen. Die Anzahl Karten pro Stockwerk:

| 1 | 2 | 3 | 4 | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $2\cdot 3$ | $3\cdot 3$ | $4\cdot 4$ | | | | $n\cdot 3$ |

- Aufsummieren: $1\cdot 3+2\cdot 3+3\cdot 3+\ldots+n\cdot 3=(1+2+3+\ldots+n)\cdot 3$
- $1+2+3+\ldots+n$ ist eine AF mit $a_1=1$ und $a_n=n$. Die Summenformel liefert:

$$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(1+n)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

- Wir erhalten damit: $3\cdot\frac{n^2+n}{2}$
- Es werden noch die Karten, die zuunterst liegen, abgezogen (bei 1 Stock ist es 1 Karte, bei 2 Stöcken sind es 2 Karten,..., bei $n$ Stöcken sind es $n$ Karten). Wir erhalten

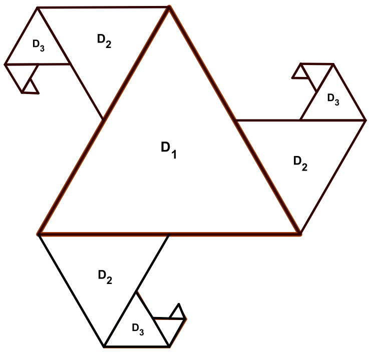
$$\underline{\underline{s_n}}=3\cdot\frac{n^2+n}{2}-n=\underline{\underline{\frac{3n^2+n}{2}}}$$

c) (1 P.) Wie viele vollständige Stockwerke könnte man mit 2000 Karten bauen ?

- $2000=\frac{3n^2+n}{2}\Rightarrow n=36.34\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{36 vollständige Stockwerke}}}$

# 6 Lösungen 2009/2010

1. (4 P./ 12 Min.) Auf der untenstehenden Abbildung ist eine Dreiecksblume zu sehen, bei der alle Dreiecke gleichseitig sind. Das grösste Dreieck hat die Seitenlänge 2, beim Übergang zum nächst kleineren Dreieck wird die Seitenlänge halbiert. Die neu hinzukommenden Dreiecke werden mit $D_2, D_3, \ldots$ bezeichnet.




**Berechne**:

a) (1 P./ 3 Min.) **Berechne**: Welche Seitenlänge hat ein Dreieck $D_{18}$ ?

- $S_n=2\cdot 0.5^{n-1}\Rightarrow\underline{\underline{D_{18}}}=2\cdot 0.5^{18-1}\approx\underline{\underline{0.000015}}$

b) (1 P./ 3 Min.) $N(D_n)$ bezeichne die Anzahl Dreiecke $D_n$. **Berechne**: $N(D_1) + N(D_2) + .... + N(D_{15})$.

- $\underline{\underline{A_n}} = 1 + 3(n-1) \Rightarrow A_{15} = 1 + 3(15-1) = \underline{\underline{43}}$

c) (2 P./ 6 Min.) Wie gross ist die Fläche (als Grenzwert) der Dreiecksblume (die aus unendlich vielen Dreiecken besteht) ?

- $A(D_1) = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^2}{4} = \sqrt{3}$
- $3 \cdot A(D_2) = 3\frac{\sqrt{3} \cdot 1^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$
- $3 \cdot A(D_3) = \frac{\sqrt{3} \cdot 0.5^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$
- $\underline{\underline{A(\text{D-Blume})}} = \sqrt{3} + \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1 - 0.25} \approx \underline{\underline{3.46}}$

# 7 2010/2011

1. **Folgen und Reihen (9 Punkte)** Vom Ursprung eines Koordinatensystems geht eine Zickzacklinie (bestehend aus unendlich vielen Teilstrecken, siehe Zeichnung) in gleicher Art über die Punkte A(100|100), B(190|10), C(271|91), ... . Sowohl die $x$-Koordinaten als auch die $y$-Koordinaten werden durch geometrische Reihen beschrieben.

a) Berechne die Koordinaten des Punktes D.

- $x_D = 100 + 90 + 81 + 72.9 = 343.9$
- $y_D = 100 - 90 + 81 - 72.9 = 18.1 \Rightarrow \underline{\underline{D(343.9|18.1)}}$

b) Berechne die Koordinaten des Punktes X (24.Buchstabe des Alphabets).

- $x_X = 100 \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{24}}{1 - \frac{9}{10}} = 920.23$
- $y_X = 100 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{9}{10}\right)^{24}}{1 - (-\frac{9}{10})} = 48.43 \Rightarrow \underline{\underline{X(920.23|48.43)}}$

c) Berechne die Gesamtlänge der unendlichen Zickzacklinie.

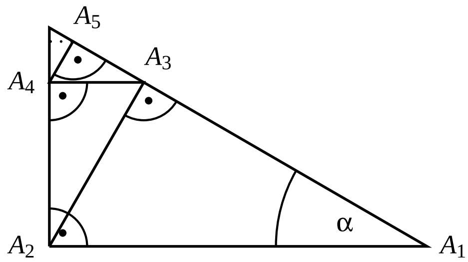
- $|\overline{OA}| = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100 \cdot \sqrt{2}$
- $|\overline{AB}| = \sqrt{90^2 + 90^2} = 90 \cdot \sqrt{2}$
- $|\overline{BC}| = \sqrt{81^2 + 81^2} = 81 \cdot \sqrt{2}$
- $a_1 = 100 \cdot \sqrt{2}, q = \frac{9}{10} \Rightarrow \underline{\underline{s}} = \frac{100\sqrt{2}}{1 - \frac{9}{10}} = \underline{\underline{1000\sqrt{2}}}$

d) Berechne die Koordinaten des Punktes, auf welchen die Zickzacklinie zielt.

- $s_x = \frac{100}{1 - \frac{9}{10}} = 1000$
- $s_y = \frac{100}{1 + \frac{9}{10}} \approx 52.63 \Rightarrow \underline{\underline{P(1000|52.63)}}$

# 8 Lösungen 2011/2012

1. (8 P.) **Folgen und Reihen** Gegeben ist der untenstehende Streckenzug, bestehend aus unendlich vielen Strecken. Wir setzen $a_1 = \overline{A_1A_2} = 10\,\text{cm}, a_2 = \overline{A_2A_3}, a_3 = \overline{A_3A_4}$, ... wobei diese Streckenlängen eine geometrische Folge bilden. Weiter sei $\alpha = 30°$.




a) Berechne die Länge der 10. Strecke.

- (0.5 P.) $\sin(30°) = \dfrac{\overline{A_2A_3}}{10\,\text{cm}} \Rightarrow \overline{A_2A_3} = \sin(30°) \cdot 10\,\text{cm} = \underline{\underline{5\,\text{cm}}}$
- (0.5 P.) $q = 5 : 10 = 0.5$
- (1 P.) $a_{10} = 10 \cdot 0.5^9 \approx \underline{\underline{0.02\,\text{cm}}}$

b) Berechne die Summe $a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{51}$.

- (0.5 P.) $a_1 = 10\,\text{cm}, q = \frac{1}{4}$
- (1.5 P.) $s_{26} = 10 \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{26} - 1}{\frac{1}{4} - 1} \approx \underline{\underline{13.33\,\text{cm}}}$

c) Wie viele Streckenlängen müssen mindestens aufsummiert werden, damit der Streckenzug länger als 19.999 cm wird?

- (1 P.) $19.999 = 10 \cdot \dfrac{0.5^n - 1}{0.5 - 1}$
- (2 P.) $\Rightarrow 1.9999 = \dfrac{0.5^n - 1}{0.5 - 1} \Rightarrow -0.99995 = 0.5^n - 1 \Rightarrow 0.00005 = 0.5^n \Rightarrow n = \frac{\log_{10}(0.00005)}{\log_{10}(0.5)} \approx$ $14.29 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{mind. 15 Strecken}}}$

d) Bei dieser Teilaufgabe ist $a_1$ unbekannt, während $\alpha$ immer noch 30° beträgt. Wie lang muss $a_1$ gewählt werden, damit der Streckenzug einen Grenzwert von 50 cm hat?

- $50 = \dfrac{a_1}{1 - 0.5} \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 25\,\text{cm}}}$