alte Maturaufgaben zu „Exponentielles Wachstum“

1 2006/2007

1. Laut Wikipedia betrug die Weltbevölkerung am 1.1.1987 fünf Milliarden Menschen, am 1.1.2000 waren es 6 Milliarden.
   a) Stelle eine Exponentialfunktion und eine lineare Funktion auf, die beide dieses Wachstum beschreiben. [$B(t) \approx 5 \cdot 10^9 \cdot 1.0141^t, B(t) \approx 5 \cdot 10^9 + 7.7 \cdot 10^7 t$]
   b) Welche der beiden Funktionen trifft den Wert 6.5 Milliarden am 1.7.2006 besser ? [Die lineare Funktion]
   c) Wann ist mit diesen beiden Funktionen jeweils mit einer Weltbevölkerung von 10 Milliarden zu rechnen ? Gib Monat und Jahr des gefundenen Datums an. [Juli 2036, Dezember 2051]

2 2009/2010

1. In einer historischen Aufgabe wird berichtet: Kung-Fu hatte in seinem Teich mitten in der Nacht (0 Uhr) zum 1. April eine wundersame Lotusblume gesetzt, die jeweils nach 24 Stunden auf die doppelte Fläche anwuchs. Genau 30 Tage nach dem Setzen bedeckte sie um Mitternacht den Teich vollständig.
   a) Welcher Teil des Teiches war am 30. April um 12 Uhr mittags bedeckt ? [70.71%]
   b) Nehmen wir an, Kung-Fu hätte zum gleichen Zeitpunkt in einem zweiten Teich eine weitere Lotusblume gesetzt, die 0.01% des Teiches bedeckt hätte. Diese Blume hätte jeweils nach 72 Stunden ihre Fläche verdoppelt. Nach welcher Zeit (in Stunden) wäre der Teich vollständig bedeckt gewesen ? [956.72Stunden]
   c) Nach welcher Zeit (in Stunden) wäre bei beiden Teichen der prozentuale Anteil der bedeckten Fläche gleich gross gewesen ? [601.64 Stunden]

3 2011/2012

1. (7 P.) **Exponentielles Wachstum**

   Der „I-love-you-Virus“ verbreitete sich im Jahre 2000 während den ersten 5 Tagen exponentiell über E-Mail im Internet. Dadurch wurden Millionen von Computern infiziert. Angefangen auf 1 Computer zum Zeitpunkt $t = 0$, waren nach 24 Stunden bereits 200 Computer infiziert.
   a) Wie viele Computer waren nach 72 Stunden mit dem Virus infiziert?
   b) In welchem Zeitraum verdoppelte sich die Anzahl infizierter Computer?
   c) Von einem weiteren sich exponentiell verbreitenden Virus (t: Zeit in Stunden, $B(t)$: Anzahl infizierte Computer nach t Stunden) ist bekannt, dass
   $$B(0) = 1'000'000 \,\text{und}\, B(60) - B(30) = 960'000.$$
   Mit welcher Funktionsgleichung kann dieses Wachstum beschrieben werden?
   d) (3 P.) Ein dritter Virus verbreitete sich gleichzeitig mit dem „I-love-you-Virus“. Die Gleichung $C(t) = 420'000 \cdot 1.08^t$ beschreibt dessen exponentielles Wachstum. Nach wie vielen Stunden waren beim „I-love-you-Virus“ halb so viele Computer infiziert wie bei diesem dritten Virus (**Bemerkung:** falls du die Vorschrift für den „I-love-you-Virus“ nicht herausgefunden hast, nimm $A(t) = 3 \cdot \sqrt[12]{100}^t$ an)?

4 Lösungen 2011/2012

1. (7 P.) **Exponentielles Wachstum**

   Der „I-love-you-Virus" verbreitete sich im Jahre 2000 während den ersten 5 Tagen exponentiell über E-Mail im Internet. Dadurch wurden Millionen von Computern infiziert. Angefangen auf 1 Computer zum Zeitpunkt $t = 0$, waren nach 24 Stunden bereits 200 Computer infiziert.

   a) (1 P.) Wie viele Computer waren nach 72 Stunden mit dem Virus infiziert?
   - $A(0) = 1, A(24) = 1 \cdot a^{24} = 200 \Rightarrow A(t) = \sqrt[24]{200}^{\,t}$
   - $\underline{\underline{A(72)}} = \sqrt[24]{200}^{\,72} = \underline{\underline{8'000'000}}$

   b) (1 P.) In welchem Zeitraum verdoppelte sich die Anzahl infizierter Computer?
   - (0.5 P.) $2 = \sqrt[24]{200}^{\,t} \overset{\text{solve}}{\Rightarrow} \underline{\underline{t \approx 3.14\,\mathrm{h}}}$

   c) (2 P.) Von einem weiteren sich exponentiell verbreitenden Virus (t: Zeit in Stunden, $B(t)$: Anzahl infizierte Computer nach t Stunden) ist bekannt, dass

   $$B(0) = 1'000'000 \,\text{und}\, B(60) - B(30) = 960'000.$$

   Mit welcher Funktionsgleichung kann dieses Wachstum beschrieben werden?
   - $B(t) = c \cdot a^t$
   - (0.5 P.) $B(t) = 1'000'000 \cdot a^t$
   - (1.5 P.) $960'000 = 1'000'000 \cdot a^{60} - 1'000'000 \cdot a^{30} \overset{\text{solve}}{\Rightarrow} a \approx 1.02 \Rightarrow \underline{\underline{B(t) \approx 1'000'000 \cdot 1.02^t}}$

   d) (3 P.) Ein dritter Virus verbreitete sich gleichzeitig mit dem „I-love-you-Virus". Die Gleichung $C(t) = 420'000 \cdot 1.08^t$ beschreibt dessen exponentielles Wachstum. Nach wie vielen Stunden waren beim „I-love-you-Virus" halb so viele Computer infiziert wie bei diesem dritten Virus (**Bemerkung:** falls du die Vorschrift für den „I-love-you-Virus" nicht herausgefunden hast, nimm $A(t) = 3 \cdot \sqrt[12]{100}^{\,t}$ an)?
   - (1 P.) $420'000 \cdot 1.08^t = 2 \cdot \sqrt[24]{200}^{\,t}$
   - (1 P.) $\Rightarrow \left(\dfrac{1.08}{\sqrt[24]{200}}\right)^t = \dfrac{2}{420'000} \Rightarrow$ (1 P.) $\underline{\underline{t}} = \dfrac{\log\left(\frac{2}{420'000}\right)}{\log\left(\frac{1.08}{\sqrt[24]{200}}\right)} \approx \underline{\underline{85.22\,\mathrm{h}}}$
   - **Lösung mit Alternative:**
   - (1 P.) $420'000 \cdot 1.08^t = 6 \cdot \sqrt[12]{100}^{\,t}$
   - (1 P.) $\Rightarrow \left(\dfrac{1.08}{\sqrt[12]{100}}\right)^t = \dfrac{6}{420'000} \Rightarrow$ (1 P.) $\underline{\underline{t}} = \dfrac{\log\left(\frac{6}{420000}\right)}{\log\left(\frac{1.08}{\sqrt[12]{100}}\right)} \approx \underline{\underline{36.36\,\mathrm{h}}}$