alte Maturaufgaben zu „Differential- und Integralrechnung“

1 2006/2007

1. (9 P.) Zwei unabhängige Teilaufgaben.

   a) Eine Fläche A wird durch die x-Achse und die Parabel $y = -x^2 + 2x$ begrenzt. Wie muss der Parameter m der Geradengleichung $y = mx$ ($m \in (0,2)$) gewählt werden, damit die Gerade die Fläche halbiert ?

   b) Gegeben ist Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = a^2x^2 - (a+2)^2$ mit $a > 0$. Das Flächenstück zwischen dem Grafen von f und der x-Achse wird um die x-Achse rotiert. Wie gross muss a sein, damit der dabei entstehende Körper minimales Volumen hat ?

2. (10 P.)Drei unabhängige Teilaufgaben:

   a) (2.5 P.) Eine Polynomfunktion 3.Grades ($f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$) hat im Ursprung einen Wendepunkt und geht durch die Punkte $A(-1|3)$ und $B(2|0)$. Bestimme die Funktionsgleichung $f(x)$.

   b) (3.5 P.) Gegeben ist die Funktionsvorschrift $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$

      i) (1.5 P.) Bestimme die Gleichung der Kurventangenten im Punkt $P(-1|?)$

      ii) (2 P.) Wie müssen die reellen Parameter a und b bei der Funktion $F(x) = \dfrac{ax+b}{e^x}$ gewählt werden, damit die Bedingung $F'(x) = f(x)$ erfüllt ist ?

   c) (4 P.) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 4 - 3 \cdot e^{-0.5x}$ und $g(x) = e^{0.5x}$.

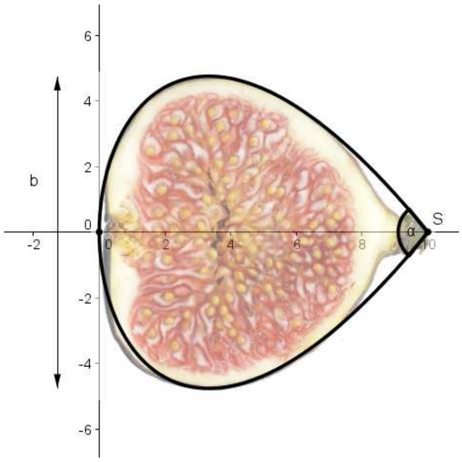
      - (2.5 P.) Die Graphen schneiden sich in zwei Punkten. Bestimme den Schnittwinkel im Schnittpunkt mit der grösseren x-Koordinate.
      - (1.5 P.) Für welchen x-Wert im Intervall [0,2] ist die y-Koordinatendifferenz der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ am grössten ?

2 2007/2008 (Aufgabe von C.Ryser, angepasst von M.Fischer)

1. (6 P.) Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit A auf der positiven x-Achse, B auf der positiven y-Achse und C im Ursprung. Die Punkte A und B liegen dazu auf einer Tangente t des Grafen von $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$. Wähle die Tangente so, dass das Dreieck minimalen Flächeninhalt hat. Weise das Minimum nach.

3 2009/2010

1. (6 P.) Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = (3.3 - ax) \cdot \sqrt{1.4x}$ mit $a > 0$. Die Graphen der Funktionen $f_a(x)$ und $-f_a(x)$ können im entsprechenden Intervall als Rand einer Feige interpretiert werden. Der Ursprung bilde den Fusspunkt der Feige, der Punkt S die Spitze der Feige.



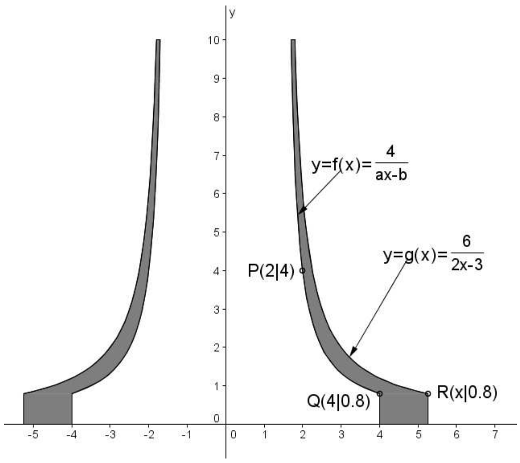
   a) Bestimme den Parameter a so, dass die Feige die Spitze $S(10|0)$ besitzt.

   b) Bestimme für diesen Fall die Grösse des Winkels α an der Spitze S der Feige (falls Du bei a) nicht erhalten hast, rechne mit $a = 0.5$).

   c) Bestimme für den Fall $a = 1$ das Volumen der Feige.

   d) Bestimme den Parameter a so, dass die Breite der Feige an der breitesten Stelle $b = 8$ misst.

2. (6 P.) Ein drehsymmetrischer Kühlturm ist 100 m hoch. Nebenstehende Skizze zeigt einen Schnitt längs der Rotationsachse (Längeneinheit: 10 m)



   a) Berechne die Parameter a und b der Funktion $f(x)$.

   b) Die integrate-Funktion des TI-89 darf verwendet werden. Berechne den Inhalt der Querschnittsfläche der Kühlturmwand (s. schraffierte Fläche).

4 2010/2011

1. **Differenzialrechnung (11 Punkte)** Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{9x}{e^x}, x \in \mathbf{R}$ und e: Eulersche Zahl.
   a) Untersuche die Funktion $f(x)$ auf Nullstellen, Asymptoten, Extremalstellen und Wendepunkte.
   b) Im Punkt $P(2|f(2))$ soll die Tangente t an den Graphen von $f(x)$ gelegt werden. Sie schneidet die x-Achse im Punkt Q und die y-Achse im Punkt R. Berechne die Gleichung der Tangente und bestimme die Koordinaten des Punktes Q.
   c) Die Punkte $S(u|f(u)), V(u|0) (u > 0)$ und $O(0|0)$ bilden jeweils ein Dreieck ΔSOV. Genau eines dieser Dreiecke hat einen maximalen Flächeninhalt. Berechne die Koordinaten des Punktes S für diesen Fall.
2. **Integralrechnung (9 Punkte)** Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = -kx^3 + (k+1)x^2$ mit $k > 0$.
   a) Berechne für $k = 1$ den Flächeninhalt, der vom Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird.
   b) Bestimme den Parameter k so, dass die vom Graphen der Funktion f_k und der x-Achse eingeschlossene Fläche einen Inhalt von 3.375 besitzt (integrate- und solve-Funktion des TI-NSpire dürfen verwendet werden).
   c) Das Lot durch den Hochpunkt H von f_k auf die x-Achse unterteilt die vom Graphen und der x-Achse eingeschlossene Fläche in zwei Teilflächen A_1 und A_2. Zeige, dass das Verhältnis $A_1 : A_2$ für alle Werte des Parameters k gleich ist.

5 2011/2012

1. (7 P.) **Analysis** Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Gegeben sind die Funktionen

$$f_a(x) = -\frac{e^{ax}}{a^2} \text{ und } g_a(x) = x^2 + ax.$$

   a) Zeige, dass die Tangenten von f und g an der Stelle $x = 0$ unabhängig von a einen rechten Winkel einschliessen.
   b) Bestimme bei $f_a(x)$ den Parameter a so, dass die Tangente t an der Stelle $x = \ln(3)$ mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschliesst.
   c) Wie muss a gewählt werden, damit die Gerade h mit der Gleichung $y = 2x - 9$ und der Graph von g genau einen Schnittpunkt haben?
   d) Es sei $a = 4$. Der Graph von g und die Gerade i mit der Gleichung $y = -2x - 5$ schliessen eine Fläche A ein, deren Inhalt zu berechnen ist.
2. (11 P.) **Analysis**

   Es sei $b \in \mathbb{R}^+$. Gegeben ist die Funktion $f_b(x) = -\frac{1}{32}bx^3 + \frac{3}{16}bx^2$.
   a) Bestimme alle Nullstellen, alle Hoch- und Tiefpunkte und alle Wendepunkte in Abhängigkeit von b.
   b) Der Graph von $f_b(x)$ schliesst mit der x-Achse die Fläche A ein. Wie muss $b > 1$ gewählt werden, damit die Parabel p mit der Vorschrift $y = 0.3x^2$ die Fläche A in zwei gleich grosse Stücke zerlegt?
   c) Die Gerade $x = a$ mit $0 < a < 4$ schneidet $f_8(x)$ im Punkt R und die Parabel $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Punkt S. Die zwei Parallelen zur x-Achse durch die Punkte R und S, die y-Achse und die Gerade $x = a$ umschliessen ein Rechteck. Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal?

6 Lösungen 2006/2007

1. (9 P.) Zwei unabhängige Teilaufgaben.

   a) (4.5 P.) Eine Fläche A wird durch die x-Achse und die Parabel $y = -x^2 + 2x$ begrenzt. Wie muss der Parameter m der Geradengleichung $y = mx$ ($m \in (0, 2)$) gewählt werden, damit die Gerade die Fläche halbiert ?
   - (0.5 P.) $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$
   - (0.5 P.) $A = \int_0^2 -x^2 + 2x = 4/3$
   - (1 P.) $mx = -x^2 + 2x \Rightarrow (x_1 = 0), x_2 = -m + 2$
   - (2.5 P.) $\dfrac{(-m+2)\cdot\left(-(-m+2)^2 + 2(-m+2)\right)}{2} + \int_{-m+2}^{2} -x^2 + 2x \,\mathrm{d}x = 2/3 \Rightarrow \underline{\underline{m \approx 0.41}}$

   b) (4.5 P.) Gegeben ist Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = a^2x^2 - (a+2)^2$ mit $a > 0$. Das Flächenstück zwischen dem Grafen von f und der x-Achse wird um die x-Achse rotiert. Wie gross muss a sein, damit der dabei entstehende Körper minimales Volumen hat ?
   - (1 P.) Nullstellen: $a^2x^2 - (a+2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{a+2}{a}, x_2 = \dfrac{a+2}{a}$
   - (1.5 P.) Volumenintegral: $V_x(a) = \pi \int_{-\frac{a+2}{a}}^{\frac{a+2}{a}} (a^2x^2 - (a+2)^2)^2 \,\mathrm{d}x = \dfrac{16\pi(a+2)^5}{15a}$
   - (2 P.) $V_x'(a) = 0 \Rightarrow \dfrac{32\pi(a+2)^4(2a-1)}{15a^2} = 0 \Rightarrow (a_1 = -2), \underline{\underline{a_2 = 1/2}}$

2. (10 P.)Drei unabhängige Teilaufgaben:

   a) (2.5 P.) Eine Polynomfunktion 3.Grades ($f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$) hat im Ursprung einen Wendepunkt und geht durch die Punkte $A(-1|3)$ und $B(2|0)$. Bestimme die Funktionsgleichung $f(x)$.
   - $A(-1|3) : f(-1) = 3 \Rightarrow \underline{-a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 3}$ (Gl.1) (0.5 P.)
   - $B(2|0) : f(2) = 0 \Rightarrow \underline{8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0}$ (Gl.2) (0.5 P.)
   - $W(0|0) : f''(0) = 0 \Rightarrow \underline{2a_2 = 0}$ (Gl.3) (0.5 P.)
   - $U(0|0) : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{a_0 = 0}$ (Gl.4) (0.5 P.)
   - TR: $a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = -4$ und $a_0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x^3 - 4x}}$ (0.5 P.)

   b) (3.5 P.) Gegeben ist die Funktionsvorschrift $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$

      i) (1.5 P.) Bestimme die Gleichung der Kurventangenten im Punkt $P(-1|?)$
      - $f'(x) = -xe^{-x}$
      - $f'(-1) = e \approx 2.72 \Rightarrow y = 2.72x + n$ (0.5 P.)
      - $f(-1) = 0$ (0.5 P.)
      - $0 = 2.72(-1) + n \Rightarrow n = 2.72 \Rightarrow \underline{\underline{y = 2.72x + 2.72}}$ (0.5 P.)

      ii) (2 P.) Wie müssen die reellen Parameter a und b bei der Funktion $F(x) = \dfrac{ax+b}{e^x}$ gewählt werden, damit die Bedingung $F'(x) = f(x)$ erfüllt ist ?
      - $F'(x) = \dfrac{(-ax + a - b)}{e^x}$ (0.5 P.)
      - Koeffizientenvergleich:
        – $-a = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = -1}}$ (1 P.)
        – $a - b = 1 \Rightarrow -1 - b = 1 \Rightarrow \underline{\underline{b = -2}}$ (0.5 P.)
      - Variante: Wir stellen zwei Gleichungen auf:
        – $F'(1) = f(1) \Rightarrow -b/e = 2/e$ (Gl.1)
        – $F'(2) = f(2) \Rightarrow (-a-b)e^{-2} = 3/e^2$ (Gl.2) $\Rightarrow \underline{\underline{a = -1 \text{ und } b = -2}}$.

c) (4 P.) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 4 - 3 \cdot e^{-0.5x}$ und $g(x) = e^{0.5x}$.

- (2.5 P.) Die Graphen schneiden sich in zwei Punkten. Bestimme den Schnittwinkel im Schnittpunkt mit der grösseren x-Koordinate.
  - (0.5 P.) Schnittpunkt: $f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - 3 \cdot e^{-0.5x} = e^{0.5x} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 \approx 2.20$
  - (0.5 P.) $f'(x) \approx 1.5 \cdot 0.61^x \Rightarrow f'(2.20) \approx 0.5$ und (0.5 P.) $g'(x) \approx 0.5 \cdot 1.65^x \Rightarrow g'(2.20) \approx 1.5$
  - (0.5 P.) $\tan^{-1}(0.5) \approx 26.57°, \tan^{-1}(1.5) \approx 56.31°$
  - (0.5 P.) $\underline{\underline{\alpha}} = 56.31° - 26.57° = \underline{\underline{29.74°}}$
- (1.5 P.) Für welchen x-Wert im Intervall [0,2] ist die y-Koordinatendifferenz der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ am grössten ?
  - (1 P.) $Z(x) = f(x) - g(x) = 4 - 3 \cdot e^{-0.5x} - e^{0.5x}$
  - (0.5 P.) $Z'(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x \approx 1.1}}$

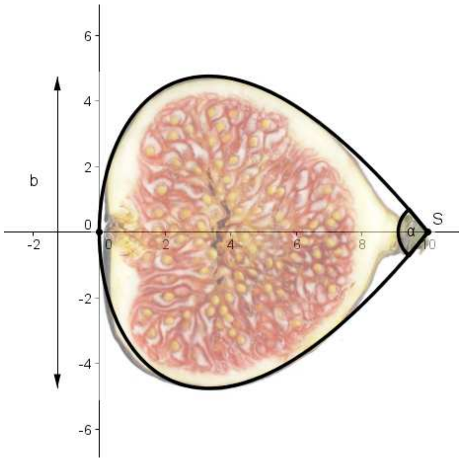
7 Lösungen 2007/2008

1. (6 P.) Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit A auf der positiven x-Achse, B auf der positiven y-Achse und C im Ursprung. Die Punkte A und B liegen dazu auf einer Tangente t des Grafen von $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$. Wähle die Tangente so, dass das Dreieck minimalen Flächeninhalt hat. Weise das Minimum nach.

   - Die Gerade schneide die Tangente an der Stelle t
   - $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(t) = -\dfrac{1}{(t-1)^2}$
   - $y = -\dfrac{1}{(t-1)^2}x + n$
   - Die Gerade liegt auf dem Punkt $(t|f(t)) = (t|\dfrac{1}{t-1} + 1)$
   - Einsetzen: $\dfrac{1}{t-1} + 1 = -\dfrac{1}{(t-1)^2}t + n \Rightarrow n = \dfrac{1}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{t-1} + 1$
   - $y = -\dfrac{1}{(t-1)^2}x + \dfrac{t}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{t-1} + 1$
   - $0 = -\dfrac{1}{(t-1)^2}x + \dfrac{1}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{t-1} + 1 \Rightarrow 0 = -x + t + t - 1 + (t-1)^2 \Rightarrow 0 = -2 + 2t + t^2 - 2t + 1 \Rightarrow 0 = t^2 - 1 \Rightarrow t = \pm 1$
   - Zielfunktion: $Z(t) = \dfrac{\left(\dfrac{t}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{t-1} + 1\right) \cdot t^2}{2}$
   - $Z'(t) = \dfrac{t^3(t-2)}{(t-1)^3}$
   - $Z'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 2 \Rightarrow$ An der Stelle $t = 2$
   - Nachweis des Minimums
     - $Z''(t) = \left(\dfrac{t^4 - 2t^3}{(t-1)^3}\right)' = \dfrac{(4t^3 - 6t^2)(t-1)^3 - (t^4 - 2t^3) \cdot 3(t-1)^2}{(t-1)^6}$
     - $Z''(2) = \dfrac{8-0}{1} = 8 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mi für } t = 2}}$

8 Lösungen 2009/2010

1. (6 P.) Der TI-89 darf bei a) wie ein einfacher TR, bei b),c) und d) uneingeschränkt verwendet werden. Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = (3.3 - ax) \cdot \sqrt{1.4x}$ mit $a > 0$. Die Graphen der Funktionen $f_a(x)$ und $-f_a(x)$ können im entsprechenden Intervall als Rand einer Feige interpretiert werden. Der Ursprung bilde den Fusspunkt der Feige, der Punkt S die Spitze der Feige.



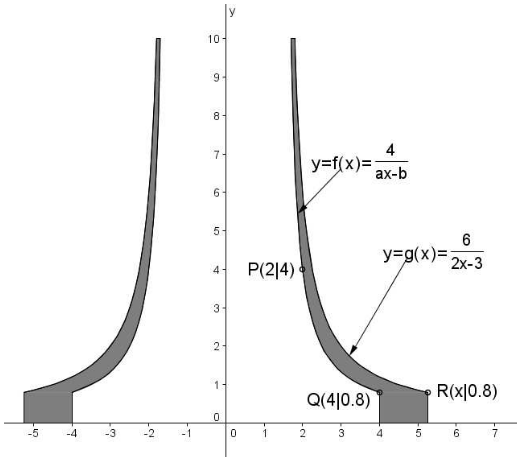
a) (1 P.) Bestimme den Parameter a so, dass die Feige die Spitze $S(10|0)$ besitzt.
   - $f_a(10) = (3.3 - a \cdot 10) \cdot \sqrt{14} = 0$
   - $3.3 - 10a = 0 \Rightarrow 10a = 3.3 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0.33}}$

b) (1.5 P.) Bestimme für diesen Fall die Grösse des Winkels α an der Spitze S der Feige (falls Du bei a) nicht erhalten hast, rechne mit $a = 0.5$).
   - $f_a'(x) = \dfrac{-1.77(ax - 1.1)}{\sqrt{x}}$
   - $f_{0.33}'(10) = -1.23 \Rightarrow \tan^{-1}(-1.23) \approx -50.89°$
   - $\underline{\underline{\alpha}} \approx 2 \cdot 50.89° \approx \underline{\underline{101.78°}}$

c) (1 P.) Bestimme für den Fall $a = 1$ das Volumen der Feige.
   - $f_1(x) = (3.3 - x) \cdot \sqrt{1.4x}$
   - $V_x = \pi \displaystyle\int_0^{3.3} (3.3 - x)^2 \cdot \sqrt{1.4x}^2 \, dx = \underline{\underline{43.47}}$

d) (2.5 P.) Bestimme den Parameter a so, dass die Breite der Feige an der breitesten Stelle $b = 8$ misst.
   - $f_a'(x) = \dfrac{-1.77(ax - 1.1)}{\sqrt{x}} = 0$
   - $ax - 1.1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1.1}{a}$
   - $f(\dfrac{1.1}{a}) = 4 \Rightarrow (3.3 - 1.1) \cdot \sqrt{1.4 \cdot \dfrac{1.1}{a}} = 4 \Rightarrow 2.2 \cdot \sqrt{\dfrac{1.54}{a}} = 4 \Rightarrow 4.84 \cdot \dfrac{1.54}{a} = 16 \Rightarrow \underline{\underline{a}} = \dfrac{4.84 \cdot 1.54}{16} \approx \underline{\underline{0.47}}$

2. (6 P.) Ein drehsymmetrischer Kühlturm ist 100 m hoch. Nebenstehende Skizze zeigt einen Schnitt längs der Rotationsachse (Längeneinheit: 10 m)



a) (2.5 P./ 7 Min.) Berechne die Parameter a und b der Funktion $f(x)$.

- $4=\dfrac{4}{2a-b}\quad 0.8=\dfrac{4}{4a-b}$
- $8a-4b=4\quad 3.2a-0.8b=4$
- $8a-4b=4\quad 16a-4b=20$
- $8a=16\Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$
- $16-4b=4\Rightarrow -4b=-12\Rightarrow \underline{\underline{b=3}}$

b) (3.5 P.) Die integrate-Funktion des TI-89 darf verwendet werden. Berechne den Inhalt der Querschnittsfläche der Kühlturmwand (s. schraffierte Fläche).

- $10=\dfrac{4}{2x-3}\Rightarrow 20x-30=4\Rightarrow x=1.7$
- $10=\dfrac{6}{2x-3}\Rightarrow 20x-30=6\Rightarrow x=1.8$
- $\displaystyle\int_{1.7}^{4}\frac{4}{2x-3}\,\mathrm{d}x\approx 5.051$
- $\displaystyle\int_{1.8}^{5.25}\frac{6}{2x-3}\,\mathrm{d}x\approx 7.577$
- $0.1\cdot 10=1$
- $7.577+1-5.051\approx 3.526$
- $2\cdot 3.526\approx 7.05\Rightarrow \underline{\underline{A\approx 705\,\mathrm{m}^2}}$

9 Lösungen 2010/2011

1. **Differenzialrechnung (11 Punkte)** Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{9x}{e^x}, x \in \mathbf{R}$ und e: Eulersche Zahl.

   a) (4 P.) Untersuche die Funktion $f(x)$ auf Nullstellen, Asymptoten, Extremalstellen und Wendepunkte.

   - $0 = \frac{9x}{e^x} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow N(0|0)$
   - Asymptoten:
     - (0.5 P.) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
     - (1 P.) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
     - Extremalpunkte:
       * $f'(x) = \dfrac{9-9x}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 1$
       * $f''(1) < 0, f(1) \approx 3.31 \Rightarrow \underline{\underline{Max(1|3.31)}}$
     - Wendepunkte:
       * $f''(x) = \dfrac{9x-18}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 2$
       * $f'''(2) \neq 0, f(2) \approx 2.44 \Rightarrow \underline{\underline{W(2|2.44)}}$

   b) (3 P.) Im Punkt $P(2|f(2))$ soll die Tangente t an den Graphen von $f(x)$ gelegt werden. Sie schneidet die x-Achse im Punkt Q und die y-Achse im Punkt R. Berechne die Gleichung der Tangente und bestimme die Koordinaten des Punktes Q.

   - (1 P.) $y_t = mx + n \Rightarrow m = f'(2) \approx -1.22$
   - (1.5 P.) $2.44 \approx -1.22 \cdot 2 + n \Rightarrow n \approx 4.87 \Rightarrow \underline{\underline{y_t = -1.22x + 4.87}}$
   - (0.5 P.) $Q : y_t = 0 : x = 4 \Rightarrow \underline{\underline{Q(4|0)}}$

   c) (4 P.) Die Punkte $S(u|f(u)), V(u|0)(u > 0)$ und $O(0|0)$ bilden jeweils ein Dreieck ΔSOV. Genau eines dieser Dreiecke hat einen maximalen Flächeninhalt. Berechne die Koordinaten des Punktes S für diesen Fall.

   - $S(u|f(u)) = S(u|\frac{9u}{e^u}), V(u|0), O(0|0)$
   - (2 P.) $A(u) = \dfrac{u \cdot 9u}{2 \cdot e^u} = \dfrac{9u^2}{2e^u} \Rightarrow$ (0.5 P.) $A'(u) = \dfrac{9x - \frac{9x^2}{2}}{e^x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$
   - (0.5 P.) $A''(0) > 0 \Rightarrow Min, A''(2) < 0 \Rightarrow Max \Rightarrow$ (1 P.) $\underline{\underline{S(2|2.44)}}$

2. **Integralrechnung (9 Punkte)**

   Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = -kx^3 + (k+1)x^2$ mit $k > 0$.

   a) (2.5 P.) Berechne für $k = 1$ den Flächeninhalt, der vom Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird.

   - $k = 1 : f_1(x) = -x^3 + 2x^2$
   - $-x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$
   - $\underline{\underline{\int\limits_0^2 -x^3 + 2x^2 \, \mathrm{d}x}} = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = -\frac{16}{4} + \frac{16}{3} = \frac{28}{\underline{\underline{3}}}$

   b) (2.5 P.) Bestimme den Parameter k so, dass die vom Graphen der Funktion f_k und der x-Achse eingeschlossene Fläche einen Inhalt von 3.375 besitzt (integrate- und solve-Funktion des TI-NSpire dürfen verwendet werden).

   - $-kx^3 + (k+1)x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{k+1}{k}$
   - $\int\limits_0^{\frac{k+1}{k}} -kx^3 + (k+1)x^2 \, \mathrm{d}x = 3.375 \Rightarrow \underline{\underline{k_1 = 0.5, k_2 \approx 36.33}}$

   c) (4 P.) Das Lot durch den Hochpunkt H von f_k auf die x-Achse unterteilt die vom Graphen und der x-Achse eingeschlossene Fläche in zwei Teilflächen A_1 und A_2. Zeige, dass das Verhältnis $A_1 : A_2$ für alle Werte des Parameters k gleich ist.

   - $f_k'(x) = 2(k+1)x - 3kx^2$
   - $f_k'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{2(k+1)}{3k}$
   - $f_k''(x) = 2(k+1) - 6kx$
   - $f_k''(0) = 2(k+1) > 0 \Rightarrow$ Min
   - $f_k''(\frac{2(k+1)}{3k}) = -2(k+1) < 0 \Rightarrow$ Max
   - $A_1 = \int\limits_0^{\frac{2(k+1)}{3k}} -kx^3 + (k+1)x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{4(k+1)^4}{81k^3}$
   - $A_2 = \int\limits_{\frac{2(k+1)}{3k}}^{\frac{k+1}{k}} -kx^3 + (k+1)x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{11(k+1)^4}{324k^3} \Rightarrow A_1 : A_2 = 11 : 16$, <u>ist also unabhängig von k</u>

10 Lösungen 2011/2012

1. (7 P.) **Analysis** Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Gegeben sind die Funktionen

$$f_a(x) = -\frac{e^{ax}}{a^2} \text{ und } g_a(x) = x^2 + ax.$$

a) (2 P.) Zeige, dass die Tangenten von f und g an der Stelle $x = 0$ unabhängig von a einen rechten Winkel einschliessen.

- (1 P.) $f'(x) = -\frac{ae^{ax}}{a^2} = -\frac{e^{ax}}{a} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{a}$
- (0.5 P.) $g'(a) = 2x + a \Rightarrow g'(0) = a$
- (0.5 P.) $f'(0) \cdot g'(0) = -1 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{die Graphen stehen rechtwinklig aufeinander}}}$

b) (1 P.) Bestimme bei $f_a(x)$ den Parameter a so, dass die Tangente t an der Stelle $x = \ln(3)$ mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschliesst.

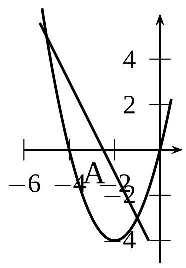
- $f'(\ln(3)) = -\frac{e^{a\ln(3)}}{a} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a \approx -0.55}}$

c) (2 P.) Wie muss a gewählt werden, damit die Gerade h mit der Gleichung $y = 2x - 9$ und der Graph von g genau einen Schnittpunkt haben?

- $x^2 + ax = 2x - 9 \Rightarrow x^2 + ax - 2x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + (a-2)x + 9 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 36 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 36 \Rightarrow a_{1,2} - 2 = \pm 6 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 8, a_2 = -4}}$

d) (2 P.) Es sei $a = 4$. Der Graph von g und die Gerade i mit der Gleichung $y = -2x - 5$ schliessen eine Fläche A ein, deren Inhalt zu berechnen ist.

- (0.5 P.) Skizze mit der richtigen Fläche (s.Abbildung)
- (0.5 P.) $x^2 + 4x = -2x - 5 \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = -1$
- (1 P.) $\int\limits_{-5}^{-1} -2x - 5 - (x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x \approx 10.67$



2. (11 P.) **Analysis**

Es sei $b \in \mathbb{R}^+$. Gegeben ist die Funktion $f_b(x) = -\frac{1}{32}bx^3 + \frac{3}{16}bx^2$.

a) (4 P.) Bestimme alle Nullstellen, alle Hoch- und Tiefpunkte und alle Wendepunkte in Abhängigkeit von b.

- (0.5 P.) $f_b(x) = -\frac{1}{32}bx^3 + \frac{3}{16}bx^2 = bx^2\left(-\frac{1}{32}x + \frac{3}{16}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{N_1(0|0), N_2(6|0)}}$
- (0.5 P.) $f_b'(x) = -\frac{3}{32}bx^2 + \frac{3}{8}bx = bx\left(-\frac{3}{32}x + \frac{3}{8}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$
- (0.5 P.) $f_b''(x) = -\frac{3}{16}bx + \frac{3}{8}b = b\left(-\frac{3}{16}bx + \frac{3}{8}\right)$
- (0.5 P.) $f_b''(0) = \frac{3}{8}b > 0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{T(0|0)}}$
- (0.5 P.) $f_b''(4) = -\frac{3}{8}b < 0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{H(4|b)}}$
- (0.5 P.) $f_b''(x) = -\frac{3}{16}bx + \frac{3}{8}b = 0 \Rightarrow x = 2$
- (1 P.) $f_b'''(x) = -\frac{3}{16}b \neq 0$ wenn $b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \underline{\underline{W(2|\frac{b}{2})}}$

b) (3 P.) Der Graph von $f_b(x)$ schliesst mit der x-Achse die Fläche A ein. Wie muss $b > 1$ gewählt werden, damit die Parabel p mit der Vorschrift $y = 0.3x^2$ die Fläche A in zwei gleich grosse Stücke zerlegt?

- (1 P.) $\int_0^6 -\frac{1}{32}bx^3 + \frac{3}{16}bx^2 \,\mathrm{d}x = \frac{27b}{8}$
- (1 P.) $-\frac{1}{32}bx^3 + \frac{3}{16}bx^2 = 0.3x^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{6(b-1.6)}{b}$
- (1 P.) $\int_0^{\frac{6(b-1.6)}{b}} -\frac{1}{32}bx^3 + \frac{3}{16}bx^2 - 0.3x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{27b}{16} \Rightarrow b_1 \approx 0.87, \underline{\underline{b_2 \approx 10.06}}$

c) (4 P.) Die Gerade $x = a$ mit $0 < a < 4$ schneidet $f_8(x)$ im Punkt R und die Parabel $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Punkt S. Die zwei Parallelen zur x-Achse durch die Punkte R und S, die y-Achse und die Gerade $x = a$ umschliessen ein Rechteck. Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal?

- (0.5 P.) Skizze mit dem korrekt eingezeichneten Rechteck.
- (1 P.) $R\left(a| -\frac{1}{4}a^3 + \frac{3}{2}a^2\right), S\left(a|\frac{1}{2}a^2\right)$
- (1 P.) $F(a) = a \cdot (-\frac{1}{4}a^3 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2) = a^3 - \frac{1}{4}a^4$ für $a \in (0,4)$
- (0.5 P.) $F'(a) = 3a^2 - a^3 = a^2(3-a) = 0 \iff a_1 = 0, \underline{a_2 = 3}$
- (1 P.) $F''(a) = 6a - 3a^2 \Rightarrow F''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$ Maximum
- Für $\underline{\underline{a = 3}}$ ist der Flächeninhalt maximal, $F(3) = 6.75$